بنیاد بین المللی تئوری ها و دکترین ها
The International Foundation of Theories and Doctrines

گزیده ای از کتاب :

افسون ریاضیات

کشف جذابیت‌های ریاضیات

نویسنده : تئونی پاپاس

ترجمه: عباس‌علی کتیرائی

انتشارات مازیار

مجموعه گزیده کتب

پیشگفتار

بسیاری از افراد ریاضیات را یک برنامه درسی انعطاف ناپذیر و سخت می دانند. چنین چیزی اصلاً واقعیت ندارد. ذهن انسان دائم در حال آفریدن اندیشه های ریاضی و دنیاهای تازه و جذابی مستقل از جهان ماست و این اندیشه ها، درست مثل این که عصای جادوگر به حرکت درآمده باشد، به سرعت با جهان ما همراه می شوند. شیوه ای که در آن اجسام می توانند از یک بعد به بعد دیگری در آیند و همیشه می توان بین دو نقطه، نقطه ای جدید پیدا کرد، اعداد وارد عمل می شوند. معادله ها حل می شوند، نمودارها تصویر می سازند، بی نهایت مسائل را حل می کند، فرمول ها ساخته می شوند ـ به نظر می رسد که همه چیز کیفیتی جادویی دارد.
اندیشه های ریاضی تاروپود تخیل هستند. این اندیشه ها در دنیایی غریب وجود دارند و موضوعات آن از منطق محض و خلاقیت پدید می آید. یک مربع یا دایره کامل در جهان ریاضیات وجود دارد، در حالی که جهان ما تنها نمایش ریاضی از اشیاء را در خود دارد.

" تئونی پاپاس" از پیشگفتار

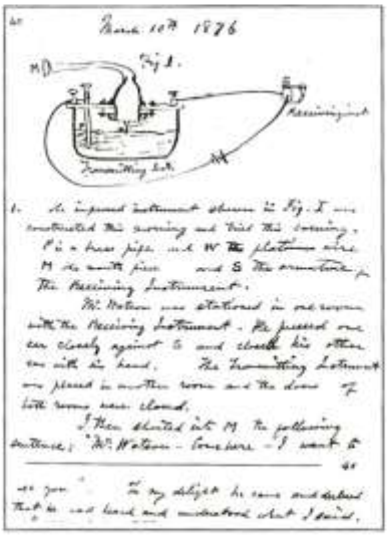
هیچ شاخه ای از ریاضات، هر قدر هم انتزاعی باشد، ممکن نیست روزی در یکی از پدیده های جهان واقعی به کار نرود. «نیکلای لباچفسکی»

فصل اول ؛ ریاضیات در زندگی روزمره

ریاضیات در یک گفتگوی تلفنی

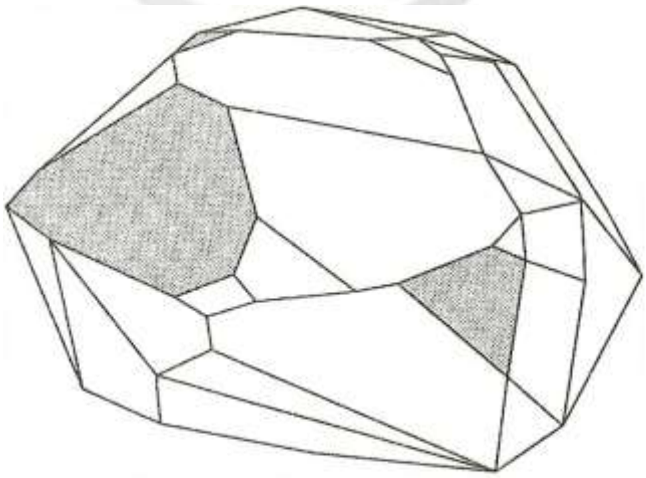
صدای شما چگونه منتقل می شود؟

در جدیدترین سامانه ها، مکالمات به سیگنال های دیجیتالی تبدیل می شود و آنگاه به صورت یک رشته اعداد در مبنای دو رمزگذاری می شود. بنابراین تمام مکالمات جداگانه و به طور «همزمان» با ترتیبی معین در خطوط انتقال می یابد تا در مقصد رمزگشایی شود.



صفحاتی از دفترچه یادداشت الکساندر گرهام بل که در آن درباره نخستین پیام تلفنی را که از طریق اختراع خود به دستیارش، آقای واتسون فرستاد، نوشته است: «آنگاه جمله زیر را با فریاد گفتم: «آقای واتسون ـ بیا ـ می خواهم تو را ببینم» در میان شادی من، او آمد و گفت صدایم را شنیده و آنچه که گفته ام فهمیده است.»

این سیستم، برای برقراری هر مکالمه بهترین مسیر را انتخاب می کند و مجموعه ای از فرمان ها را برای برقراری ارتباط می فرستد. کل این فرایند در کسری از ثانیه انجام می شود. در بهترین حالت، سامانه مسیری مستقیم را به طرف مقابل انتخاب می کند ـ که از نظر صرفه جویی در مسافت و زمان مطلوب است. اما اگر خط مستقیم به دلیل مکالمات دیگر گنجایش نداشته باشد، ارتباط جدید از بهترین مسیر جایگزین برقرار می شود. اینجاست که برنامه ریزی خطی نقش خود را ایفا می کند. مسئله مسیریابی تلفن را به صورت شکلی هندسی با میلیون ها وجه تجسم کنید. هر یک از رأس های آن نشانه یک راه حل ممکن است. مسئله، یافتن بهترین راه حل بدون آزمودن تک تک آنهاست. گئورگ ب. دانتزیگ ریاضیدان در سال ۱۹۴۷ روش سیمپلکس را برای یافتن راه حل مسئله های پیچیده برنامه ریزی خطی ابداع کرد. اساس این روش بر حرکت روی لبه های این شکل و آزمودن گوشه ها یکی پس از دیگری است، در حالی که پیوسته به دنبال بهترین راه حل است. تا وقتی که تعداد راه حل های ممکن بیش از ۱۵۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ نباشد این روش می تواند در یافتن راه حل مناسب مؤثر باشد. در سال ۱۹۸۴، نارندرا کارمارکار ریاضیدان، روشی کشف کرد که زمان حل مسائل بسیار دشوار برنامه ریز خطی، مانند یافتن بهترین مسیر برای مکالمه های تلفنی راه دور را به طور چشمگیری کاهش می دهد. الگوریتم کارمارکار با عبور از میانه شکل، از راه میان بُر استفاده می کند. این الگوریتم پس از انتخاب نقطه ای دلخواه درون این شکل هندسی، کل ساختار آن را پوشش می دهد و مسئله را با آوردن نقطه انتخاب شده به مرکز شکل، به صورتی تازه در می آورد. گام بعدی این است که نقطه جدیدی برای یافتن بهترین راه حل مسئله و پوشش دوباره ساختار شکل پیدا کنیم. تصور غلطی است که انتظار داشته باشیم بدون چنین پوششی، هر بار دستورالعملی ظاهر شود و به ما بهترین راه را نشان دهد. این تبدیل های پیاپی بر مفاهیم هندسه تصویری استوار است و به سرعت به یافتن بهترین راه حل می انجامد.



پیچیدگی و زمان حال

همان طور که این بخش از کتاب قانون اثر رابرت کوتس توصیف می کند، گاه اتفاقاتی می افتد که دلیل آشکاری برای آن وجود ندارد. نشانۀ هشدار دهنده ای هم از رخ دادن آن اتفاق وجود ندارد. همۀ ما شاهد این گونه اتفاقات بوده ایم و آن را به «تصادف» نسبت داده ایم، چون دلیل آشکاری برای پیش بینی خلاف آن نداریم.

پیچیدگی، دانشی در حال شکل گیری است که ممکن است برای چنین پرسش هایی، پاسخ یا دست کم توضیحی داشته باشد:

چگونه است که:

- جهان از هیچ پدید آمده است؟
- سلول ها می دانند به چه اندامی تبدیل خواهند شد و کجا؟
- لس آنجلس در ۱۷ ژانویۀ ۱۹۹۴ شاهد زلزله ای با شدت و ویرانی غیر منتظره بود؟
- فرمانروایی دراز مدت اتحاد شوروی بر اقماش در مدتی چنین کوتاه پایان یافت؟
- یوگوسلاوی ناگهان درگیر جنگ داخلی خشونت آمیزی شد؟
- گونه هایی که میلیون ها سال بدون تغییر بوده اند، ناگهان جهش پیدا می کنند؟
- بازار سهام بدون دلیلی آشکار ناگهان افزایش می یابد یا سقوط می کند؟

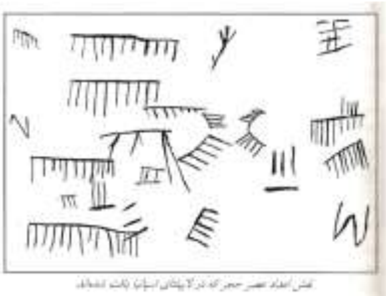
این فهرست بی پایان است. عامل اصلی مشترک در همۀ این رویدادها این است که همگی نمونۀ یک سامانۀ بسیار پیچیده اند ـ سامانه ای تابع شمار بسیاری از عوامل گوناگون که تعادلی ظریف دارد و بین پایداری و آشوب در نوسان است. عوامل مؤثر بر چنین سامانه ای همواره در حال رشد و تغییرند. در نتیجه یک سامانۀ پیچیده، پیوسته در حالت آشوب بالقوه یا در واقع مرز آشوب قرار دارد. به نظر می رسد گرایش به جنگ دائمی بین نظم و آشوب وجود دارد. پویایی خودانگیخته خود سامانه به کمک آن، با تغییر و تطبیق خود با شرایط و عوامل دائماً در حال تغییر، تعادل خود را باز می یابد. آنان که این دانش جدید را مطالعه می کنند، با تعداد زیادی از مفاهیم ریاضی و علمی، مانند نظریۀ آشوب، برخال ها، احتمالات، هوش مصنوعی، منطق فازی و غیره برخورد می کنند.

فصل دوم ؛ جهان جادویی ریاضیات

جهان های هندسه

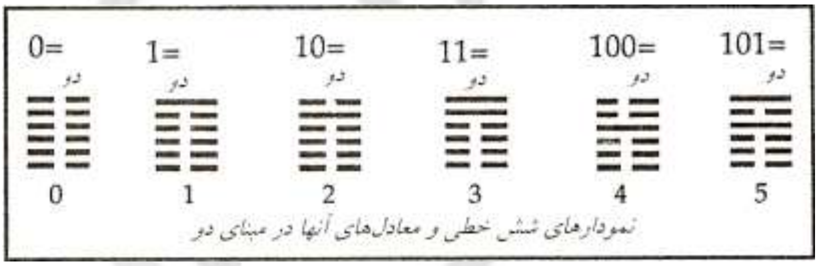
..... عالم همیشه در برابر دیدگان ماست، اما تا زمانی که درک زبان آن و تفسیر حروفی را که با آن نوشته شده است نیاموزیم، نمی توانیم آن را به درستی بشناسیم. عالم به زبان ریاضی نوشته شده است و الفبای آن... شکل های هندسی است، که بدون آنها درک یک کلمه از آن برای انسان امکان پذیر نیست؛ بدون آنها، در هزارتویی تاریک سرگردان می مانیم.

جهان های اعداد (!!)



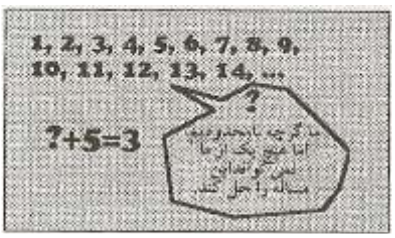
اعداد را می توان نخستین عناصر ریاضیات دانست. نمادهای اولیهٔ آنها احتمالاً علائمی بوده اند که روی زمین رسم می شدند تا اشیاء را نشان دهند.

سابقهٔ اعداد شمارشی به دوران ما قبل تاریخ می رسد. به نشانه های سادهٔ نقوش اعداد عصر حجر در غار لاپیلتا در جنوب اسپانیا توجه کنید، که از حدود ۲۵۰۰۰ سال پیش تا عصر مفرغ (۱۵۰۰ پیش از میلاد) مسکون بوده است. عدد □ از سه هزار سال پیش، هنگامی که از آن برای محاسبهٔ مساحت و محیط دایره استفاده کرده اند، شناخته شده است، و بعدها نشان داده شد که یک عدد گنگ و غیرجبری است. تمدن های باستانی از وجود کمیت های کسری آگاهی داشته اند. مصریان از نماد هیرو گلیفی دهان برای نوشتن کسرهایشان استفاده می مثلاً برابر برابر - بود. ریاضیدانان باستان اعداد گنگ را می شناختند و روش های جالبی برای تخمین زدن مقدار آنها ابداع کرده بودند. در واقع، یونانیان روش نردبانی را برای یافتن مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ ابداع کرده بودند، اما بابلیان از روش دیگری استفاده می کردند.



نمودارهای شش خطی و معادل‌های آنها در مبنای دو

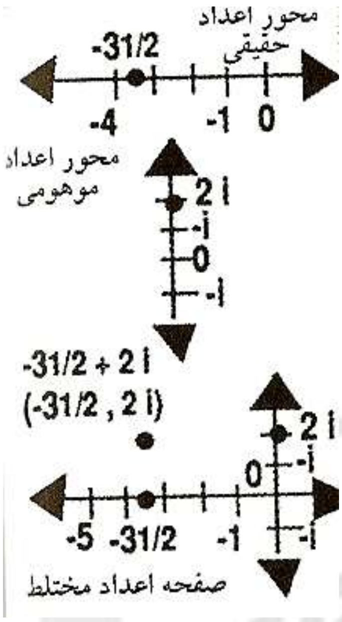
طی قرن ها، تمدن های مختلف نمادها و دستگاه های شمارش اعداد را ابداع کرده اند و توسعه داده اند و در قرن بیستم، با انقلاب کامپیوتر اعداد دو دویی و مبنای دو به کار گرفته شده است. نخستین بار، گوتفرید ویلهلم لایب نیتس (۱۷۱۶ – ۱۶۴۶) در مقاله ای مطلبی دربارهٔ دستگاه دودویی نوشت (۱۶۷۹). او نامه ای به پدر یواخیم بووه، مبلغ یسوعی در چین نوشت. از طریق بووه بود که لایب نیتس دریافت شش خطی های آی چینگ با دستگاه عدد نویسی دودویی او ارتباط دارد. او متوجه شد که شش خطی ها، با گذاشتن صفر به جای هر خط شکسته و ۱ به جای هر خط راست، اعداد دودویی را نمایش می دهند.



نوشته های عربی اعداد منفی را به اروپا معرفی کردند. اما بیشتر ریاضیدانان قرن های شانزدهم و هفدهم میلادی تمایلی به پذیرش این اعداد نداشتند. نیکولا شوکه (قرن

پانزدهم) و میخائل اشتیفل (قرن شانزدهم) اعداد منفی را بی معنی و احمقانه می دانستند. جروم کاردن (۱۵۷۶ — ۱۵۰۱) نیز گرچه اعداد منفی را به عنوان پاسخ معادلات به کار برد، آنها را پاسخ هایی غیر ممکن می دانست. حتی بلز پاسکال گفته است: «من کسانی را می شناسم که نمی توانند بفهمند با برداشتن چهار از صفر، صفر باقی می ماند.» به این ترتیب تاریخ آشکار می کند که برای حل بعضی مسائل خاص، به ابداع اعدادی جدید نیاز بود. مثلاً، تلاش برای بیان مفهوم $\sqrt{-1}$ یا حل معادله $x^2 = -1$ به خلق اعداد موهومی انجامید و اعداد موهومی ریاضیدانان را به گسترش جهان اعداد، تا آنجا که تمام اعداد حقیقی و موهومی و بیش از آن را نیز در برگیرد، رهنمون شد!

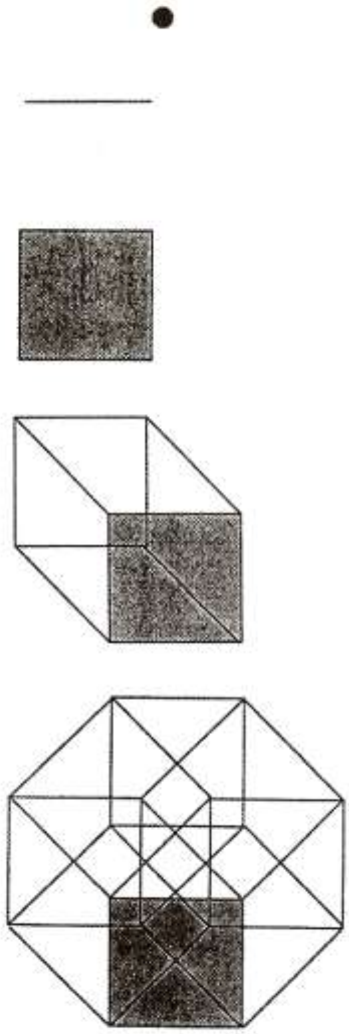
نمودارها ابزاری برای نمایش موضوعات ریاضی هستند. محور اعداد حقیقی ترتیب تمام اعداد حقیقی و فاصله و اندازهٔ نسبی آنها را نسبت به صفر نشان می دهد. هر نقطه ای روی این خط تنها با یک عدد حقیقی متناظر است و بر عکس ـ یعنی روی این خط تنها یک نقطهٔ متناظر با عدد $-3\frac{1}{2}$ وجود دارد. برای اعداد موهومی از محور اعداد موهومی استفاده می کنند. بنابراین جای عدد 2i در محل نشان داده شده است. (عکس ص ۴۸)



با ترکیب محورهای اعداد حقیقی و اعداد موهومی، راهی برای نشان دادن اعداد مختلط بر روی آنچه صفحهٔ اعداد مختلط نام دارد می یابیم. محورهای اعداد حقیقی و موهومی در مبدأ خود بر هم عمودند. هر نقطه روی صفحه ای که این دو می سازند، تنها با یک عدد مختلط متناظر است ـ هیچ عدد مختلط دیگری در آن موقعیت قرار ندارد. بنابراین زوج مرتب (۳ و۴ ـ) با عدد مختلط 3i+۴ ـ منطبق است. (۰ و ۴) به معنی 0i +۴ است که با عدد ۴ برابر است. این دستگاه مختصات راهی خلاقانه برای ساماندهی و نمایش اعداد مختلط بود. اینک پرسش این است، آیا هیچ عددی وجود دارد که در این صفحه نمایش داده نشود؟

جهان های ابعاد

بیایید به جهان هایی که مفهوم ابعاد آنها را پدید آورده است نگاهی بیندازیم. یک جهان ریاضی می تواند روی تنها یک نقطه یا یک خط، روی یک صفحه، در فضا، یا در یک «ابر مکعب» (چهار بعدی) وجود داشته باشد. زندگی و دنیای خود را روی یک صفحهٔ تحت تصور کنید. موجودات سه بعدی می توانند به سادگی بودن اطلاع شما از بالا و پایین نگاه کنید. موجودات سه بعدی می توانند به سادگی بودن اطلاع شکا از بالا یا پایین جهان شما را مورد هجوم قرار دهند. ریاضیدانان، نویسندگانن و هنرمندان کوشیده اند تا با استفاده از اندیشه های گوناگون، در آثارشان ماهیت ابعاد مختلف را به تسخیر خود در آورند. ابعاد بالاتر از بعد سوم همیشه جذاب بوده اند. مکعب یکی از نخستین اشیای سه بعدی بود که با تعدیل شدن به ابرمکعب در اینجا نشان داده شده است. حتی برنامه هایی کامپیوتری طراحی شده اند تا به کمک ترسیم پرسپکتیوهای سه بعدی از وجوه مختلف ابرمکعب، تصوری کلی از بعد چهارم به دست دهند.



چهار بعدی

قلمرو جهان های بی نهایت

دیدن جهان در دانه ای شن، و بهشت در گلی خودرو، بی کرانگی را در کف دستت بگیر، و جاودانگی را در ساعتی نگاه دار. «ویلیام بلیک»

بی کرانگی هزاران سال است که تخیل بشر را برانگیخته است. بی کرانگی، در حوزه های گوناگون اندیشه هویت های مختلفی پیدا کرده است. در زمان های قدیم اندیشهٔ بی کرانگی، درست یا نادرست، با اعداد بزرگ ارتباط داشت. مردم دنیای باستان با نگاه کردن به ستارگان و سیاره ها یا دانه های شن در ساحل، مفهوم بی نهایت را احساس می کردند. فیلسوفان و ریاضیدانان باستان مانند زنون، آناکساگوراس، دموکریتوس، ارسطو و ارشمیدس اندیشه هایی را که مفهوم بی نهایت عرضه می کرد، مطرح کردند و مورد بحث و تعمق قرار دادند.

ارسطو اندیشهٔ دوگونه بی نهایت بالقوه و واقعی را مطرح کرد. او می گفت که تنها بی نهایت بالقوه وجود دارد.[1]

ارشمیدوس در شمارندهٔ ماسه ها این اندیشهٔ نامحدود بودن تعداد دانه های ماسه در یک ساحل را با یافتن روشی عملی برای محاسبهٔ تعداد آنها در همهٔ ساحل های جهان رد کرد.

در بسیاری از پارادوکس ها مفهوم بی نهایت عامل اصلی قلمداد شده است. پارادوکس های آشیل و لاک پشت و تقسیم دو جزئی[2] زنون خوانندگان را برای قرن ها حیرت زده کرده است. به پارادوکس های گالیله[3] نیز که به پاره خط ها، نقطه ها و مجموعه های نامتناهی می پردازد باید اشاره کرد.

مزرعه گل های آفتابگردان در روستاهای اسپانیا تصوری از بی نهایت به وجود می آورد.

---

[1] اعداد شمارشی باقوه نامتناهی اند، زیرا می توان به هر عددی یکی اضافه کرد تا عدد بعدی به دست آید؛ اما هیچ گاه نمی توان به کل مجموعه دست یافت.

[2] زنون در پارادوکس تقسیم دو جزئی خود چنین استدلال می کند: مسافری که به سوی مقصد معینی راه می پیماید، هرگز به مقصد نمی رسد، زیرا این مسافر ابتدا باید نصف راه را طی کند، با رسیدن به نیمه راه، او باید دوباره نیمی از فاصله باقیمانده را طی کن. پس نیمی از آن بخش باقی می ماند و چون همیشه نیمهٔ دوم راه باقی می ماند که باید پیموده شود و از بی نهایت نقطهٔ نیمه راه باید گذر کرد، این مسافر هرگز به مقصد نمی رسد.

[3] گالیله در اثر خود گفتگوهایی دربارهٔ دو علم جدید (۱۶۳۴) از مفهوم بی نهایت در رابطه با اعداد صحیح مثبت و مربع این اعداد بحث می کند. او حتی به تناظر یک به یک این دو مجموعهٔ متناهی می پردازد، اما به این نتیجه می رسد که مفاهیم برابری، بزرگتر بودن و کوچکتر بودن تنها در مورد مجموعه های متناهی قابل استفاده است. گالیله اعتقاد داشت که باید اصل کل همیشه از اجزایش بزرگتر است هم در مجموعه های متناهی و هم در مجموعه های نامتناهی صدق کند. سیصد سال بعد، کانتور نشان داد که این اصل در مورد مجموعه های نامتناهی معتبر نیست و هنگام کار روی مجموعه های نامتناهی از مفهوم یک به یک برای اصل تصور رایج درباره مفاهیم برابری، بزرگتری و کوچکتری استفاده کرد. اصطلاحات کانتور به بسیاری از پارادوکس ها پایان داد، از جمله پارادوکس مجموعه های نامتناهی و کل همیشه از اجزایش بزرگتر است.

اقلیدوس (حدود ۳۰۰ پیش از میلاد) با نشان دادن این که آخرین عدد اول وجود ندارد نشان داد که اعداد اول بی پایانند. پیشرفت در قلمرو بی نهایت از سوی برنارد بولتسانو (۱۸۴۸ ـ ۱۷۸۱)، گوتفرید لایب نیتس (۱۷۱۶ ـ ۱۶۴۶) و ریشاردِدِ کیند (۱۹۱۶ ـ ۱۸۳۱) انجام گرفته است. اما کار استثنایی گئورگ کانتور (۱۹۱۸ ـ ۱۸۴۵) در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه ها بزرگ ترین پیشرفت بوده است. کانتور با آفرینش و پالایش اندیشه هایش راهی جدید برای سازماندهی ریاضیات با استفاده از مفهوم مجموعه یافت. او روشی برای مقایسهٔ مجموعه های نامتناهی با ایجاد اعداد ترامتناهی پیدا کرد ـ اعدادی که اجازه ورود به قلمرو اعداد متناهی را یافتند. کانتور با استفاده از مجموعه های هم ارز و شمارش پذیری مشخص کرد که کدام یک از مجموعه های نامتناهی تعداد عضوهای یکسانی دارند و یک عدد ترامتناهی[۴]به آنها اختصاص داد.

مفهوم بی نهایت علاوه بر تحریک ذهن ما، یک ابزار ضروری در ریاضیات است. بی نهایت نقشی تعیین کننده در بسیاری از کشفیات ریاضی داشته است.

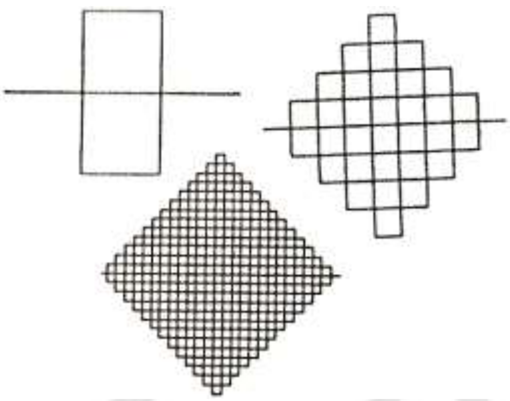
[۴] اعداد ترا متناهی، اعدادی هستند که تعداد اعضای مجموعه های نامتناهی را با آنها بیان می کنند. م

جهان های برخال

من واژهٔ برخال را از واژهٔ برخه ساخته ام. که به معنی کسر یعنی «شکستن» و به وجود آوردن تکه های نامنظم است.... چقدر این واژه برای منظور ما مناسب است! ـ کسر علاوه بر شکستن به معنی کم نیز هست. «بنوا ماندل برو»

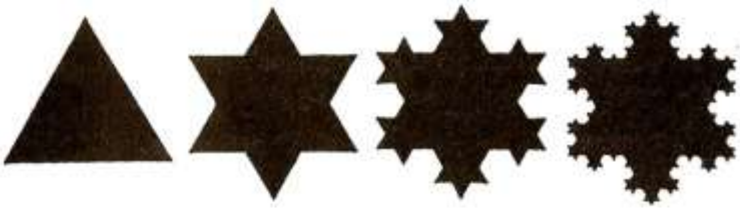
برخال ها چیزهای شکوهمندی هستند که به اشکال بسیار نامحدودی در می آید. ارنستو چزارو (ریاضیدان ایتالیایی، ۱۹۰۶ ـ ۱۸۵۹) دربارهٔ برخال هندسی منحنی برف دانهٔ کخ نوشته است: آنچه مرا بیش از همه دربارهٔ این منحنی به شگفتی وامی دارد این است که هر جزء آن شبیه به کل است. برای تصور هر چه کامل تر آن، باید درک کرد که هر مثلث کوچک در این ساختار، مانند کل شکل است که با مقیاس مناسبی کوچک شده است و خود نیز در بر دارندهٔ مثلث های کوچک تری است که آنها نیز مانندکل شکلند و بیشتر کوچک شده اند و به همین ترتیب تا بی نهایت... این شباهت ویژگی خود مانایی همهٔ اجزاء، هر قدر هم کوچک، است که موجب می شود این منحنی چنین شگفت انگیز به نظر آید. اگر این ساختار واقعی بود، از بین بردنش بدون نابود کردن تمام آن امکان پذیر نبود، زیرا در غیر این صورت مانند موجودات زایای جهان واقعی، بی وقفه از اعماق مثلث هایش سر بر می آورد. این ماهیت برخال هاست. اگر بخشی از آن باقی بماند، آن بخش اساس برخال را حفظ می کند و به نوبهٔ خود می تواند خود را از نو تولید کند. پس یک برخال چیست؟

شاید ریاضیدانان به عمد از ارائهٔ یک تعریف خودداری کرده اند تا مانع نوآوری در خلق موجودات برخالی نشوند و اندیشه هایی را که در این حوزهٔ کاملاً جدید ریاضی عرضه می شود محدود نکنند. با پیدایش حوزهٔ جدید، مفهوم هایی مانند ابعاد برخالی، نظریهٔ تکرار، کاربردهای آشوب و خود مانایی به وجود آمد. دامنهٔ کاربردهای برخال ها از باران های اسیدی تا زئولیت ها، از اخترشناسی تا پزشکی، از فیلم سازی تا نقشه برداری و اقتصاد و غیره گسترده است.



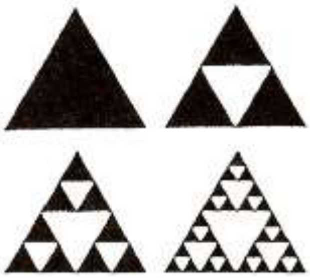
سر مرحلهٔ نخست منحنی پنائو. این منحنی در سال ۱۸۹۰ با تکرار زایش های پی در پی بر یک پاره خط ساخته شده است.

سال ۱۸۸۳، کانتور این برخال را ساخت که مجموعهٔ کانتور نامیده شد. او کار خود را با یک پاره خط به طول واحد محور اعداد آغاز کرد و یک سوم میانی آن را برداشت تا به مرحلهٔ ۱ رسید. سپس در هر یک از یک سوم های باقیمانده نیز یک سوم میانی را برداشت و به این ترتیب مرحلهٔ دوم را بوجود آورد. با بی شمار تکرار این کار، مجموعه ای نامتناهی از نقاط باقی می ماند که مجموعهٔ کانتور نامیده می شود. در اینجا نخستین مرحله های مجموعهٔ کانتور را می بینید.



این چهار مرحلهٔ نخست برف دانهٔ کخ. تولید این برف دانه از یک مثلث متساوی الاضلاع آغاز می شود. هر ضلع را به سه قسمت تقسیم و یک سوم میانی را حذف کنید و مثلثی خارج از قسمت حذف شده به ضلعی برابر همان طول بسازید.

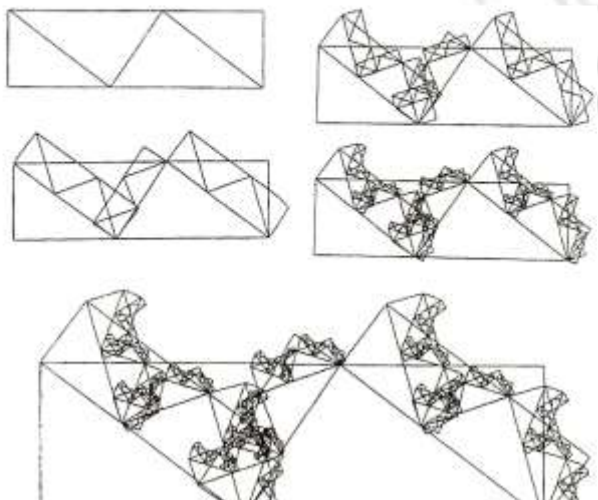
به زبان ریاضی، برخال نقشی است که با یک شکل ساده مثلاً یک پاره خط، نقطه، یا مثلث ـ شروع می شود و دائماً به کار بردن یک قاعده را می توان با یک رابطهٔ ریاضی یا با کلمات بیان کرد. تصویرهای پیشین چهار تا از اولین برخال هایی را که ساخته شده اند نشان می دهد..



چهار مرحلهٔ نخست مثلث سرپینسکی. با یک مثلث متساوی الاضلاع شروع کنید. آن را به چهار مثلث مساوی مطابق شکل تقسیم کنید و مثلث میانی را حذف کنید. با تکرار پیاپی و نامحدود این کار، بی نهایت مثلث کوچک تر ساخته می شود و برخالی به دست می آید که محیط آن بی نهایت و مساحتش برابر صفر خواهد بود!

برخال را می توان به صورت یک منحنی پیوسته در حال رشد در نظر گرفت. برای دیدن یک برخال باید آن را واقعاً در حال حرکت ببینید. برخال پیوسته گسترش می یابد. بنوا ماندل برو، با همان روحیهٔ ریاضیدانان پیشین، اندیشه ها و کاربرد های برخال ها را از ۱۹۵۱ تا ۱۹۷۵ بررسی کرد و گسترش داد. در واقع، او بود که واژهٔ برخال را وضع کرد. تصور کنید ریاضیدانان ماجراجوی قرن نوزدهم، که برای نخستین بار جرأت پیدا کردند به این مفهوم ها که هیولایی[5] و بیمارگونه شمرده می شدند نگاهی بیندازند، از دیدن هندسهٔ شگفت برخال های در حال حرکت چقدر شگفت زده شده اند.

هنگامی که ما به تصویر یا عکس یک برخال نگاه می کنیم، آن را در یک لحظه از زمان می بینیم ـ برخال در مرحلهٔ معینی از رشد خود ثبت شده است. اساساً همین اندیشهٔ رشد یا تغییر است که برخال ها را از ریشه به طبیعت پیوند زده است. چیست که در حال دگرگونی نباشد؟ حتی یک تخته سنگ نیز در سطح ملکول هایش در حال دگرگونی است. برخال ها را میتوان برای شبیه سازی هر شکلی که تصور کنید طراحی کرد. برخال ها لزوماً محدود به یک قاعده نیستند، بلکه مجموعه ای از قواعد و شرط ها می تواند این قاعده را تشکیل دهد.



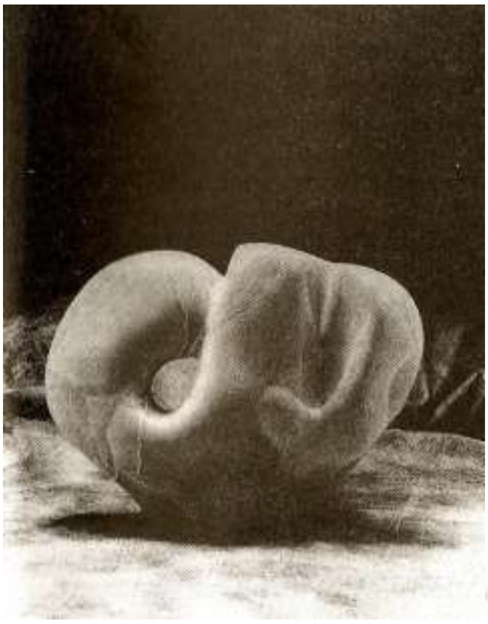
پنج مرحله نخست یک برخال هندسی که با کامپیوتر ساخته شده است.

۵ این «هیولا»ها نه پذیرفته شدند و نه ریاضیدانان محافظه کار آن دوره برای آنها ارزش بررسی و جستجو قائل بودند. تصور می شد که برخال ها مغایر با ریاضیات پذیرفته شده اند زیرا تعدادی از آنها توابع پیوسته ای بودند که مشتق پذیر نبودند، تعدادی از آنها مساحت محدود و محیط نامحدود داشتند و تعدادی می توانستند فضا را کاملاً پر کنند.

فصل سوم ؛ ریاضیات و هنر

جای دادن ریاضیات در دل سنگ

هلامن فرگسن هنرمند ریاضیدان، زیبایی ریاضیات را به پیکره های استثنای خود انتقال داده است. همانطور که او گفته است: «ریاضیات هم یک شکل هنری و هم یک علم است... من بر این باورم که انتقال ریاضیات از طریق بستر های هنری به مخاطب عام امکان پذیر است.»[6]



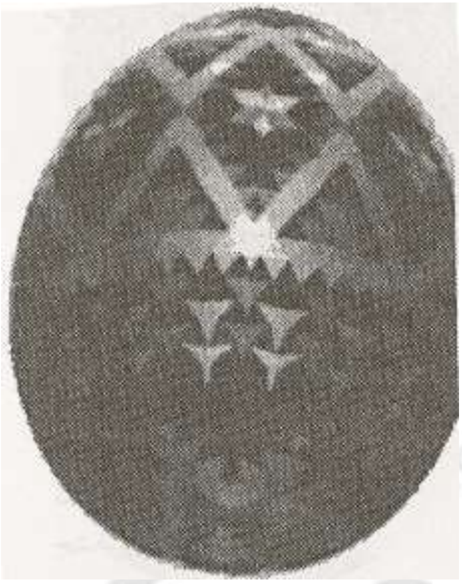
یک قطعه کوچک موسیقی راک III عکس از رادبرینگ، از هلامن فوگسن: ریاضیات در سنگ و مفرغ اثر کلر فرگسن. گروه خلاق مریدین.

[6] پدید آورنده در برابر پیوستار اثر

تخم گذاری ریاضی

هنگامی که رونالد دیل رش سفارش طراحی و ساخت یک پیکرۀ غول آسا از تخم مرغ عید پاک را برای وگرویل در آلبرتا پذیرفت، به زودی دریافت که برای انجام این کار ناگزیر خواهد بود ریاضیات آن را از پایه بنا کند.

او در طی سال ها، هنر ساخت اشیای دو بعدی را به شکل سه بعدی بهبود بخشیده است. کار او و مسائلی که حل کرده است یادآور ریاضیات است، گرچه آموزش رسمی ریاضی کمی داشته است. رش با کار با ورق های مواد مختلف مانند کاغذ و آلومینیوم، تکنیک هایی برای تا کردن ابداع کرده و آنها را به آثاری هنری تبدیل کرده است. او مسائل هندسه را با الهام، نبوغ، ریاضیات، کامپیوتر و دستانش حل می کند.



ریاضیات و هنر موریس اشر

قوانین ریاضیات تنها اختراعات یا آفرینش های انسان نیستند. آنها واقعاً «هستند»؛ آنها کاملاً مستقل از ذهن انسان وجود دارند. بیشترین کاری که یک انسان تیز هوش می تواند انجام دهد پی بردن به وجود آنها و شناختن شان است. «م.ک. اشر»

موریس اشر قطعاً به ریاضیات توجه داشته است. او به موضوع هایی که آنها را خانه بندی می کند حرکت و حیات می بخشد، آن گونه که در آثار معروفش مانند دگردیسی، آسمان و آب، روز و شب، ماهی ها و پولک ها و رویارویی تصویر شده است. علاوه بر تبدیل هایی که در صفحه صورت می گیرد، خود عناصر خانه بندی شده نیز دستخوش دگرگونی می شوند. همچنین می توان تسلط او را بر مفاهیم انتقال، دوران و انعکاس در کاشیکاری های تناوبی مشاهده کرد.

اشر از اثر مفهوم ها و موضوعات حوزهٔ توپولوژی نیز استفاده می کند.

بخشی از دگریسی III اثر اشر.

نمایشگاه عکس و بالکن نمونه هایی جالب توجه از تغییر شکل های توپولوژی هستند. گویی این گراورها بر روی ورقه هایی لاستیکی چاپ شده اند که بوسیلهٔ توپولوژی به نحوی جادویی تغییر شکل داده اند.

درهم آمیختن بُعدها و دستکاری در آنها درونمایه های ریاضی دیگری است که در بسیاری از آثار اشر دیده می شود. اشر در تابلوی خزندگان مارمولک هایی دوبعدی را تصویر می کند که در اشکال سه بعدی خزنده ای واقعی به شکلی ترسناک جان می گیرند.

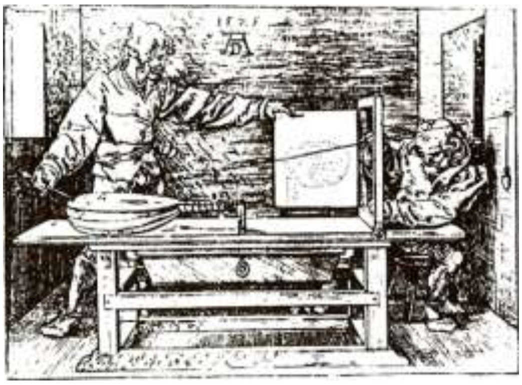
نمایشگاه عکس تغییر شکل توپولوژی را نشان می دهد.

اشر به مفاهیم نامتناهی جان بخشیده است. نیازی به عرضهٔ تعریفی برای آن نیست، کار او معنی آن را نشان می دهد. در تابلوی گرداب ها، مارپیچ ها چشم انسان را به سفری بی انتها می برد. در تابلوی حد مربع احساس زنجیرهٔ نامحدودی تصویر شده است که به مرز خویش نزدیک می شود. تابلوی حد دایره هم مدلی آرمانی برای هندسهٔ نااقلیدسی محدود و در عین حال نامتناهی هانری پوانکاره است. ما هر دو مفهوم بی نهایت و خانه بندی فضا را در تابلوی تقسیم فضای مکعب می یابیم.

خزندگان، استفاده اشر از خانه بندی، نیز استادی او در حرکت بین جهان های دو بعدی و سه بعدی را نشان می دهد.

هندسهٔ تصویری و هنر

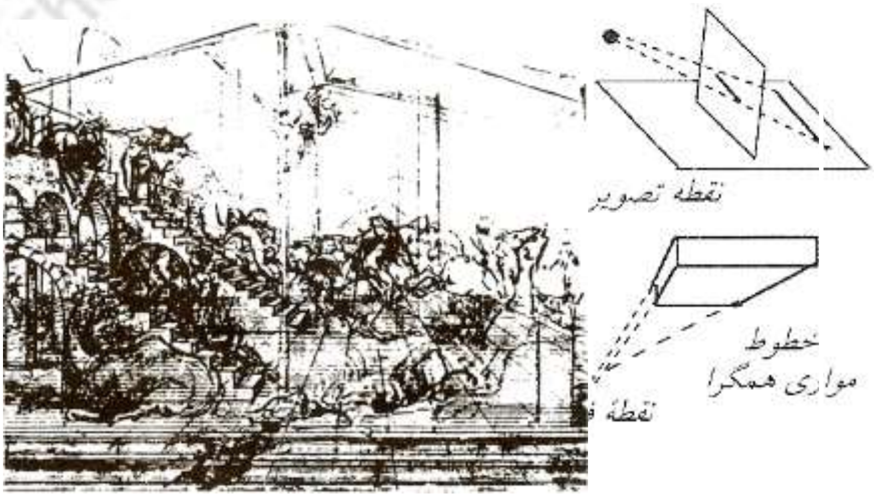
هنرمندان دورهٔ نوزایی مفاهیم ریاضی، مانند هندسهٔ تصویری را با آفرینش پیوند زدند. این هنرمندان روش هایی را برای نقاشی صحنه های سه بعدی واقع گرا بر روی بوم دو بعدی پدید آوردند. آنان چگونگی تغییر اشیا را زمانی که از فاصله ها و موقعیت های مختلف به آنها نگاه می کنیم تحلیل و اندیشهٔ پرسپکتیو را ابداع کردند. آنان استدلال کردند که هرگاه منظرهٔ بیرون را از پنجره نگاه کنند می توانند آنچه را از پنجره دیده اند، اگر چشم شان را در یک نقطهٔ کانونی نگهدارند، به صورت مجموعه ای از نقاط دید تصویر کنند. این پنجره به جای بوم نقاشی عمل می کند. طبیعی است این صفحه از جایگاه چشم هنرمند و موقعیت بوم تاثیر می پذیرد. تعدادی از هنرمندان عملاً ابزاری مکانیکی برای ترسیم پرسپکتیو، آن طوری که در دود نمودار نشان داده شده است، اختراع کردند.



ابزار تسیم پسپکتیو آلبرشت دورر.

آثار هنرمندان در زمینهٔ پرسپکتیو بر شکل گیری هندسهٔ تصویری تاثیر گذاشت. همانطور که توپولوژی ویژگی های اشیا را که پس از اعمال تبدیلات ثابت می مانند مورد مطالعه قرار می دهد، هندسهٔ تصویری خواصی از شکل های مسطح را مورد بررسی قرار می دهد که پس از تصویر شدن تغییر نمی کنند. مثلاً یک دایره را اگر از کنار نگاه کنیم مانند بیضی دیده می شود. به همین نحو مربع چهارضلعی دیگری تبدیل می شود.

اسپکتوگراف لئوناردو داوینچی



بررسی تابلو پرستش جادوی لئوناردو استفادهٔ او ار پرسپکتیو خطی و نقطه فرار را نشان می دهد.

فصل چهارم ؛ جادوی اعداد

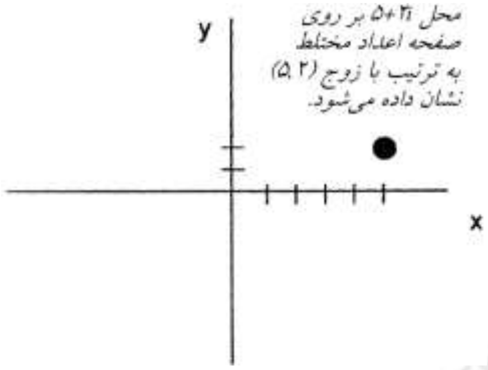
جادوی اعداد

علم ریاضیات محض، در پیشرفت های جدید خود، می تواند ادعای آن را داشته باشد که اصیل ترین آفرینش روح انسان است. «آلفرد وایتهد»

گروهی بر آنند که شیوه عمل اعداد و نتایج به دست آمده کیفیتی جادویی دارند. شاید تصور شعبده بازی به این دلیل تشدید می شود که انواع بسیاری از اعداد وجود دارد ـ اعددی که بنظر می رسد زاییدهٔ تخیلات موهوم ریاضیدانانند.

چهارگانه ها و بازی اعداد

درک چگونگی توصیف اینکه اعداد ابعاد گوناگونی دارند برای غیر متخصصان دشوار است. بنظر می رسد که عدد فقط یک عدد است ـ چیزی که کیفیتی ویژه را بیان می کند. چگونه اعدادی مانند یک، دو، سه، چهار و غیره دارای بعدند؟ بسیار خوب، دادن شاخ و برگ دیگری به ویژگی های اعداد را به ریاضیدانان واگذار کنیم. مثلاً ریاضیدانان تمام اعداد حقیقی و موهمومی را یک بعدی می دانند زیرا یک بخش دارند که مقدار آن را بیان می کند. علاوه بر آن می توان آنها را بر روی یک خط نشان داد ـ شی ء تک بعدی. از سوی دیگر اعداد مختلط دو بعدی نامیده می شوند زیرا از یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی تشکیل شده اند.



بسیاری از مفهوم های ریاضی که کشف یا اختراع شده اند، کاربردهای مختلف آنها سال ها پس از موجود بودنشان آشکار شده است. اعداد مختلط هم استثنا نیستند. مثلاً امروزه از آنها برای نشان دادن الگوهای جریان در هیدرو دینامیک، جریان های برق و شکل بال هواپیما استفاده می شود. چون این اعداد مختلف سودمند بودند و در حل انواع مسائل مختلف کارایی داشتند، بنظر می رسید که گام طبیعی بعدی جستجوی اعداد سه بعدی باشد. گرچه این جستجو موفقیت آمیز نبود، اما به کشف اعداد چهار بعدی، چهارگانه ها انجامید. سر ویلیام همیلتون در سال ۱۸۴۳ آنها را اختراع کرد. آنها هم مانند اعداد مختلط با شک و بدبینی روبرو شدند. آنها از چهار اندازه یا مشخصهٔ ترسیمی تشکیل شده اند ـ مقادیر محورهای x، y و z (اعدادی که محل یک نقطه را در فضای سه بعدی مشخص می کنند) و یک کمیت عددی (کمیتی که جهت را، آنطور که مقادیرx، y و z نشان می دهد، نشان نمی دهد) مجموعه اعداد چهارگانه، برخلاف مجموعهٔ اعداد حقیقی، موهومی و مختلط، در موقع ضرب کردن جابجایی پذیر نیستند ـ ترتیب ضرب کردن آنها در نتیجه موثر است. امروزه از این اعداد چهار بعدی چگونه استفاده می شود؟ یکی از کاربرد های معمولی آنها انتقال اطلاعات گرافیکی بر روی کامپیوتر ها با دادن چرخش در سه بعد است.

(!!)

مطابق معمول در گردهمایی اعداد، شکل گیری دارودسته ها شروع شده بود. شرم آور بود که اعداد نمی توانستند خود را خانوادهٔ خوشبختی بدانند.

در طی قرن ها، از زمان حضور اعداد شمارشی، اعداد زوج و فرد در این باره به مجادله می پرداختند که کدام یک مفیدترند. اما با ورود اعداد صحیح شامل اعداد منفی به صحنه، آنها با هم متحد شدند.

اینک در مورد موضوع اصلی گردهمایی شکل گیری گروه بندی ها آغاز شده بود ـ تازه واردین، چهارگانه ها، را چه کسی می پذیرد؟ اعداد شمارشی همیشه بسیار نخبه گرا بوده اند ـ آنها تنها پذیرایی اعداد صحیح بزرگ تر از یک بوده اند. آنها به شکل طبیعی خود آمده بودند ـ همه با ترتیبی افزایشی با تنها یک واحد تفاوت بین آنها اعداد پشت سرهم. آنان باید تازه وارد را بررسی می کردند تا ببینند در مجموعهٔ آنها قرار می گیرد یا نه. اعداد صحیح هم موافق و هم مخالف با چهارگانه ها بودند، در حالی که صفر بی طرف بود و جانبداری نمی کرد زیرا به منفی و نه مثبت بود.

قطعاً اعداد گویا موضوع را جدی تر می گرفتند. اما اعداد کسری، مطابق معمول، بیشتر به نمایش صورت و مخرج خود علاقه مند بودند تا صحبت کردن دربارهٔ اعداد اعشاری. از سوی دیگر اعداد اعشاری به اعداد کسری عادت کرده بودند. رفتار عجیب و غریب کسرها دیگر ناراحت شان نمی کرد. اعشاری ها می دانستند که کار کردن با آنها، به ویژه با ماشین حساب، بسیار آسان تر است. ۰/۰۰۷ اعداد کسری را از مد افتاده می خواند. $\frac{1}{7}$ حرفش را قطع کرد و گفت «گرچه برای جمع و تفریق ما باید مخرج مشترک گرفت، و برای ضرب و تقسیم به مقداری کار ماهرانهٔ بیشتر نیاز داریم، و در حالی که ما ترجیح می دهیم کاملاً ساده شده باشیم ـ تعدادی از نمایش های اعشاری شما برای اعداد گویا غیر عادی اند. در واقع حافظه بعضی از ماشین های حساب نمی توانند نمایش اعشاری داشته باشند. بنابراین اعداد گویا، که دربردارندهٔ اعداد شمارشی، اعداد صحیح، کسری ها و اعداد اعشاری اند، بگو مگویشان را ادامه دادند.

چهارگانه با دیدن ادامهٔ جر و بحث با اعداد «گویا»، به شکلی قابل فهم از گروه ریشه ها که با مجموعهٔ دربرگیرندهٔ $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$ که جلوی پیشخوان غذا ایستاده بودند، می ترسید. چهارگانه شنیده بود که آنها چقدر می توانند غیر منطقی باشند.[۷] اما در عین تعجب او، آنها به گفتگو علاقه مند بودند. $\sqrt{2}$ گفت «پس من شنیده ام شما چند بخش دارید و چیزی هستید که آن را چهار بعدی می نامند. خب، خودتان را ناراحت نکنید، من به صورت اعشاری پایان ناپذیر و غیر تکراری ام. تمام رقم های همراه ما مایهٔ دردسرند، پس من ترجیح می دهم به جای آن لباس جذر خود را بپوشم. شاید شما هم بتوانید روشی کوتاه تر برای بیان منظور خود پیدا کنید.»

چهارگانه کمی دلگرم شد و احساس راحتی کرد. $\sqrt{3}$ در حالی که نمی خواست چهارگانه را امیدوار کند گفت شما باید مشکلتان را با مجموعهٔ اعداد مختلط حل کنید. او همهٔ ما ـ اعداد شمارشی، صحیح، حقیقی، موهومی، گویا و گنگ ـ را به خوبی می شناسد.

چهارگانه گفت: «من شنیده ام که مجموعهٔ اعداد مختلط شخصیتی دو پاره دارند، و بین اعداد حقیقی و موهومی نوسان می کنند.»

ناگهان عدد مختلط ۳ـ۰i۰ دخالت کرد و گفت: «حق با شماست، صفحهٔ اعداد مختلط به هر یک از ما یک نقطه می دهد که می توانیم در آن مستقر شویم. وقتی اوضاع کاملاً خراب شود می توانیم به آنجا پناه بریم. می دانم که آن نقطه تنها مال خود من است و به هیچکس دیگری تعلق ندارد. پس من نمی توانم در آنجا تنها باشم، و از خود نو تجدید قوا کنم و استراحت کنم و به تفکر بپردازم. هر یک از ما برای خود نقطه ای دارد که می تواند آن را خانه اش بداند.»

---

[۷] Irrational در زبان انگلیسی هم به معنی عدد گنگ است، هم به معنی غیر منطقی.

۱۰۱۰ـ۳ به چهارگانه گفت: « مثل اینکه شما با بردارها و مقدار عددی خود شخصیتی چندگانه دارید. اطمینان دارم صفحۀ اعداد مختلط جایی برای شما ندارد.»

چهارگانه با لحنی غم انگیز گفت: «امیدوارم برای خود نقطه ای و خانه ای پیدا کنم. کسی نمی داند، به کدام راه باید رفت یا بهتر است بگویم معلوم نیست به دنبال چه مجموعه ای باید باشم.»

فانتزی اعداد

ویژگی ها و کارکردهای اعداد گاهی جادویی به نظر می رسد. یک عدد سه رقمی انتخاب کنید که یکان، و صدگان آن با هم فرق کند. مثلاً ۲۸۵، ترتیب ارقام را برعکس کنید: ۵۸۲. عدد کوچک تر را از عدد بزرگ تر کم کنید. ۲۹۷=۲۸۵ـ۵۸۲. دهگان عدد به دست آمده و جمع یکان و صدگان آن همیشه ۹ خواهد شد. حالا عدد به دست آمده ارقام را معکوس کنید: ۷۹۲

این دو عدد را با هم جمع کنید ۱۰۸۹=۲۹۷+۷۹۲ نتیجه همیشه ۱۰۸۹ خواهد بود.

فصل پنجم ؛ جادوی ریاضیات در طبیعت

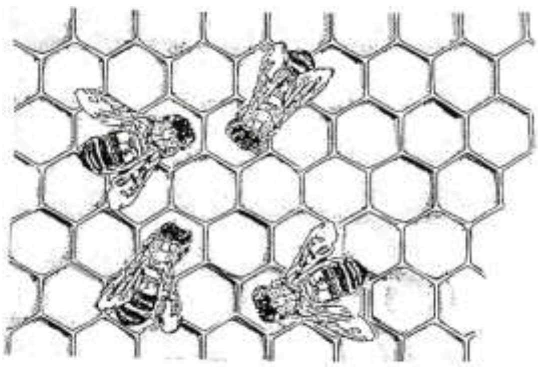
جادوی ریاضیات در طبیعت

شاخه ای در ریاضیات، هر قدر هم انتزاعی، نیست که روزی از آن در پدیده ای از جهان واقعی استفاده نشود. «لباچفسکی»

در هنگام پیدا کردن هر چیزی به طور مستقل، آن را در پیوند با چیز دیگری در جهان می یابیم. «جان موئیر»

دربارهٔ ریاضیات زنبوران عسل چه نجوا می کنند

زنبوران.... به خاطر پیش اندیشی هندسی... می دانند که با هزینهٔ مصالح برابر، شش ضلعی از مثلث و مربع بزرگتر است و عسل بیشتری جای می دهد. «پاپوس اسکندرانی»[8]



. طبیعت از پربازده ترین اشکال استفاده می کند ـ اشکالی که به کمترین هزینه و انرژی و مصالح نیاز دارند. آیا این حلقه ارتباط طبیعت و ریاضیات است؟ طبیعت در هنر حل مسائل بیشینه ـ کمینه، مسائل جبر خطی و دریافتن راه حل های بهینه برای مسائل دارای محدودیت استادی ماهر است.

با تمرکز توجه بر زنبور عسل، گنجینه ای از مفهوم های ریاضی را می توان مشاهده کرد. مثلث، مربع و شش ضلعی تنها چند ضلعی های منتظمی هستند که به تنهایی خانه بندی را کامل می کنند. از این سه، به ازای یک مساحت معین، شش ضلعی کوچکترین محیط را دارد. این بدان معنی است که زنبوران هنگام ساخت خانه های از منشور شش وجهی در کندو، برای محور کردن فضایی معین، از موم کمتری استفاده می کنند و کار کمتری نسبت به ساخت منشورهایی با قاعدهٔ مربع یا مثلث انجام می دهند. دیوارهای شانهٔ عسل از خانه هایی با ضخامت حدود ۳/. میلی متر ساخته شده است که می توانند ۳۰ برابر وزن خود را تحمل کنند. این نشان می دهد چرا شانهٔ عسل چنین سنگین به نظر می آید. یک شانهٔ عسل حدود ۴۰ × ۲۰ سانتیمتری می تواند بیش از ۲/۵ کیلوگرم عسل را در خود نگهدارد. در حالی که ساختن آن تنها به حدود چهل گرم موم نیاز دارد. زنبوران منشورهای شش وجهی را در سه بخش لوزی شکل می سازند و دیوار های خانه در زاویه های دقیقاً ۱۲۰ به هم می رسند. زنبوران به طور همزمان در بخش های مختلف کار می کنند و شانه ای بدون درزهای قالب دیدن می سازند. شانه به طور عمودی از بالا به پایین ساخته می شود و زنبوران از بخش هایی از بدنشان به جای ابزار اندازه گیری استفاده می کنند. در واقع سر آنها کار گلولهٔ شاقول را می کند.

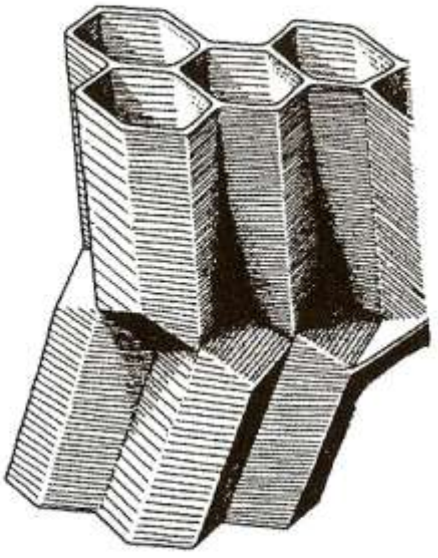
«ابزار» جالب دیگر زنبور عسل «قطب نما» است. میدان مغناطیسی زمین بر جهت یابی زنبوران تاثیر دارد. آنها می توانند به کوچکترین نوسانات میدان مغناطیسی که تنها برای مغناطیس سنج های حساس قابل تشخیص است پی ببرند. این مطلب روشن می

[8] ریاضی دان سدهٔ چهارم

کند چرا دستهٔ زنبورانی که جایی تازه را اشغال می کنند به طور همزمان در بخش های مختلف ناحیهٔ جدید بدون هدایت هیچ زنبوری کندو می سازند. همهٔ آنها شانهٔ جدید را در همان راستای کندوی قدیمی خود می سازند.

خانه هایی که باید کاملاً با هم جفت شوند در شکل صفحه بعد نشان داده شده است. زنبوران سرها را با دوازده وجهی نیمه لوزی شکل می بندند. علاوه بر آن، زنبوران دیوارها را با شیب ۱۳° می سازند، که از بیرون ریختن عسل پیش از بسته شدن در با موم جلوگیری می کند.

ارتباطات نیز موضوع جالب دیگری است. زنبورهای کارگر هنگام بازگشت به کندو از گشت زنی، جهت منبع غذایی را که یافته اند با انتقال رمزهایی به شکل یک «رقص» خبر می دهند. جهت رقص نسبت به خورشید، جهت غذا و زمان طول کشیدن رقص، فاصلهٔ آن را نشان می دهد. دانستن این مطلب همان قدر شگفت انگیز است که زنبوران عسل «می دانند» که کوتاه ترین فاصلهٔ بین دو نقطه خط راست است. پس از آنکه زنبور عسل کارگر با حرکت تصادفی از گلی به گل دیگر، بار عصارهٔ خود را کامل می کند، مستقیم ترین مسیر بازگشت به کندو را می شناسد.



شش ضلعی ها

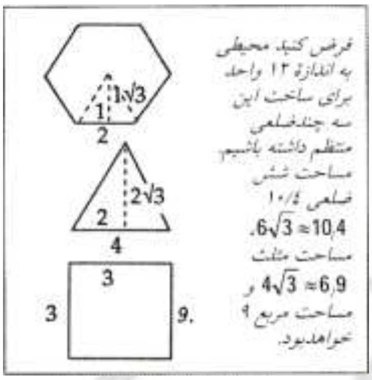
بررسی عمیق طبیعت پربارترین منبع کشفیات ریاضی است. «ژوزف فوریه»

پیوندهای بسیاری بین ریاضیات و طبیعت برقرار است. اشیا و شکل ها از حوزه های گوناگون ریاضی، در بسیاری از پدیده های طبیعی حضور دارند.

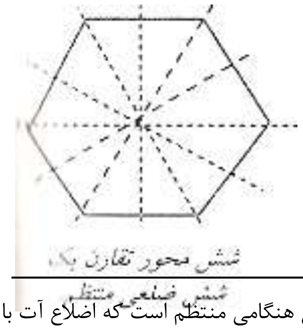
طبیعت شش ضلعی هایش را در صخره ها نیز می سازد.
میل شیطان، اثر ملی، دریاچه های ماهوت، کالیفرنیا

چه چیز در شش ضلعی ها چنین استثنایی است که طبیعت پیاپی از آن در شکل های بسیاری استفاده می کند؟ شکل گیری و رشد اشیای طبیعی، تحت تاثیر فضا و مواد اطراف است. شش ضلعی منتظم یکی از چند ضلعی های منتظم[۹] است که صفحه را خانه بندی می کند. از این سه (شش ضلعی، مربع، و مثلث متساوی الاضلاع) شش ضلعی بیشترین مساحت

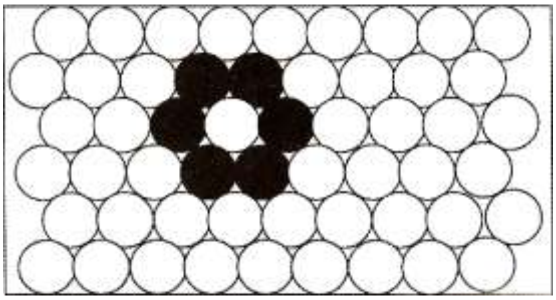
میل شیطان، اثر ملی، دریاچه های ماموت.کالیفرنیا



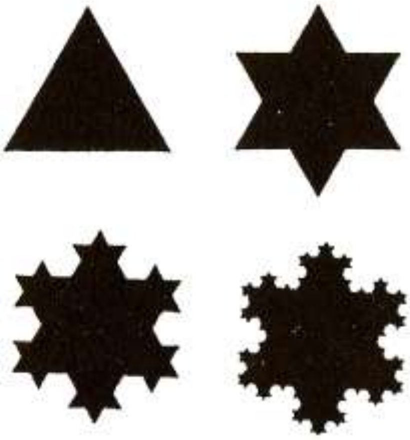
را با کمترین محیط دارد. ویژگی دیگر آن این است که شش محور تقارن دارد، و به آن این محور تقارن دارد، و به آن این امکان را می دهد که چرخش هایی چند داشته باشد بی آنکه تغییر کند. کره که بیشترین حجم را با کمترین مساحت دارد نیز با شش ضلعی ارتباط دارد. اگر کره ها در کنار یکدیگر در یک جعبه قرار گیرند هر کره میانی با شش کرهٔ دیگر مماس است. با کشیدن پاره خط هایی بین کره ها در نقطه تماس شکل محیط بر کره یک شش ضلعی منتظم است. اگر کره ها را حباب صابون در نظر بگیریم توصیفی ساده از چگونگی حلقه زدن حباب ها در آنچه پیوند سه گانه نامیده می شود به دست می دهد ـ پیوند سه گانه زاویه ۱۲۰°، به همان اندازهٔ زاویه های داخلی یک شش ضلعی منتظم است. این پیوند سه گانه در بسیاری از حوزه ها، مانند شکل گیری دانه بر روی چوب بلال، مغز موز، و ترک برداشتن گل خشک شده دیده می شود. کشف حضور جدید شش ضلعی ها در طبیعت کمتر از نخستین باری که در پشت لاک پشت، شانهٔ کندوی عسل، یا شکل یک بلور دیده شد هیجان انگیز نیست. امروزه دانشمندان به همان میزان مجذوب مشاهدهٔ شش ضلعی ها در فضا هستند. از سال ۱۹۸۷ توجه اخترشناسان بر ابر های بزرگ ماژلان متمرکز شده است، که در آن ابرنواختر A1987 مشاهده می شود. این نخستین بار نیست که حباب های گاز پس از انفجارهای اختری دیده می شوند، اما اولین باری است که این حباب ها به شکل شانهٔ عسل تجمع یافته و ظاهر شده اند. لیفان وانگ از دانشگاه منچستر در انگلستان شانهٔ عسلی کشف کرد، که تقریباً به اندازهٔ ۹۰ × ۳۰ سال نوری است، و از ۲۰ حباب تشکیل یافته است که قطر آنها حدود ۱۰ سال نوری است. وانگ می گوید این گروه از ستاره های هم اندازه ای تشکیل شده است، که تقریباً با آهنگ یکسانی برای چند هزار سال، بادهایی با اندازه ای پدید می آورد که حباب ها را در یک پیکره بندی شش ضلعی شکل می دهد.



[۹] چند ضلعی هنگامی منتظم است که اضلاع آت با هم و زاویه های آن نیز باهم برابر باشند.



در طبیعت، اشیا مدل هایی برای برانگیختن کشفیات ریاضی عرضه کرده اند و می کنند. طبیعت برای دست یابی به تعادل و توازن ظریف در آفریده هایش شیوه ای دارد. کلید فهم طرز کار طبیعت ریاضیات و علوم است. گالیله هنگامی که گفت «جهان به زبان ریاضی نوشته شده است» این مطلب را به خوبی بیان کرد. ابزارهای ریاضی وسیله هایی را فراهم می آورند که به کمک آنها می کوشیم تا به فهم، توصیف و تقلید طبیعت دست یابیم. هر کشفی به کشف بعدی منجر می شود. کشف شش ضلعی ها در فضا به چه چیزی می انجام؟ تنها زمان پاسخ ما را خواهد داد.

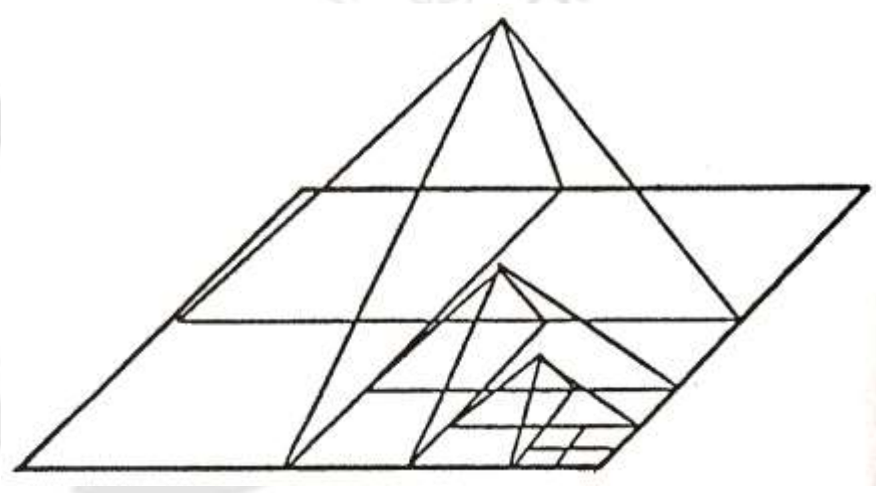


این چهار مرحلۀ نخستین منحنی برف دانه است. با مثلث متساوی الاضلاع شروع کنید. هر ضلع را به سه قسمت تقسیم کنید. قسمت میانی را بردارید و به جای آن مثلثی با یک رأس تازه بسازید

نگاهی نزدیکتر به برخال ها و طبیعت


جریان گدازه آتشفشان کیائوا در هاوایی.

برخال ها را می توان هندسهٔ طبیعت دانست. گرچه نمونه های فراوانی از اشکال هندسهٔ اقلیدسی در طبیعت مشاهده می شوند (شش ضلعی، دایره، مکعب، چهار وجهی، مربع، مثلث...). اما به نظر می رسد که روند های تصادفی طبیعت اغلب چیزهایی را پدید می آورد که هندسهٔ اقیلدسی از توضیح آن ناتوان است. در این موارد برخال ها بهترین وسیلهٔ برای توصیف را به دست می دهند. می دانیم هندسهٔ اقلیدسی برای توصیف چیزهایی مانند بلورها و کندوهای عسل بی نظیر است، اما انسان در یافتن اشکالی در هندسهٔ اقیلدسی برای شکل ذرت بو داده، اشیای خشک شده، پوست درختان، ابرها، ریشه زنجبیل و خط های ساحلی به سختی در مضیقه قرار می گیرد. در حالی که برخال های هندسی برای توصیف چیزهایی مانند برگ سرخس یا برف دانه مورد استفاده قرار می گیرند، برخال های تصادفی را می توان برای توصیف جریان گدازه و زمین کوه ها با کامپیوتر ساخت. هندسهٔ اقلیدسی از یونان باستان (اصول هندسه، اثر اقلیدس در حدود ۳۰۰ پیش از میلاد) سرچشمه گرفته است، در حالی که سرچشمهٔ برخال ها اواخر ۱۸۰۰ است. در واقع واژهٔ برخال تا سال ۱۹۷۵ از سوی بنوا ماندل برو وضع نشده بود. با ارائه آنها، هندسه ای داریم که می تواند جهان دائماً در حال دگرگونی را توصیف کند.



برخال ها را می توان دارای ابعاد کسری دانست. در هندسهٔ اقلیدسی نقطه صفر بعدی است. خط یک بعدی، و صفحه دو بعدی. خط های دندانه دار چطور؟ در حوزهٔ فراکتال ها ابعاد خط دندانه دار بین ۱ و ۲ در نظر گرفته می شود. با شروع از یک پاره خط و تقسیم آن به سه بخش مانند منحنی برف دانه، ابعاد آن بین ۱ و ۲ باقی می ماند. اگر با مستطیل که دو بعدی است شروع کنیم و آن را به چهار بخش تقسیم کنیم و هرمی بر روی دو مقطع میانی بسازیم، فراکتالی با ابعاد بین ۲ و ۳ شکل می گیرد.

فصل ششم ؛ تردستی های ریاضی در گذشته

تردستی های ریاضی در گذشته

تاریخ نشان می دهد که خلاقیت ریاضی منحصر به هیچ فرهنگ، دورۀ زمانی، تمدن یا جنسیت ویژه ای نیست. کشف گنجینۀ اندیشه های شگفت انگیز و تلاش انجام گرفته در طی قرن ها واقعاً باور نکردنی و هیجان انگیز است. این چنین کشفی خواننده را به سفری می برد که زمان و کشورهای سراسر جهان را می پیماید. این سفر آشکار می سازد که بعضی مفهوم ها بطور همزمان در کشورهای مختلفی کشف شده اند.

ما در میانۀ بسیاری از کشف های ریاضی نو هستیم. نیازی نیست کسی ریاضیدان باشد تا جوهر این اندیشه ها را دریابد یا خلاقیت آنان را بسنجد. این دو را در گذشته و آینده جستجو کنید.

فرما	هیپاتیا	پوانکاره	فیثاقورث
اویلر	نوتر	بهاسکره	عمر خیام
افلاطون	هینگ	ریمان	لباچفسکی
پاسکال	لاگرانژ	لایب نیتس	ارشمیدس
گالوا	کوشی	هیلبرت	رامانوجان
اقلیدس	اودوکسوس	ددکیند	فیبوناچی
کیلی	ژاکوبی	دکارت	کووالفسکایا
پاپوس	سقراط	بول	کرونکر
تالس	همیلتونی	سکی کوا	کاوالیری
کانتور	ساکری	کوما	برنولی
بابای	فوریه	بطلیموس	آپولونیوس
آنیزی	گالیله	گاوس	وایراشتراس
گودل	هرمیت	لژاندر	دوموآور
نپر	لاپلاس	سیلورستر	اراتوستنس
زنون	نیوتون	لولیس	کلپر
آل	ژرمن	دیوفانتوس	ارسطو
راسل	اینشتن	مرویل	خوارزمی
لوئی هوئی	بیرکوف	دوساتله	وایتهد

جدولی از تعدادی از ریاضیدانان نامی گذشته.

گالیله و تناسب

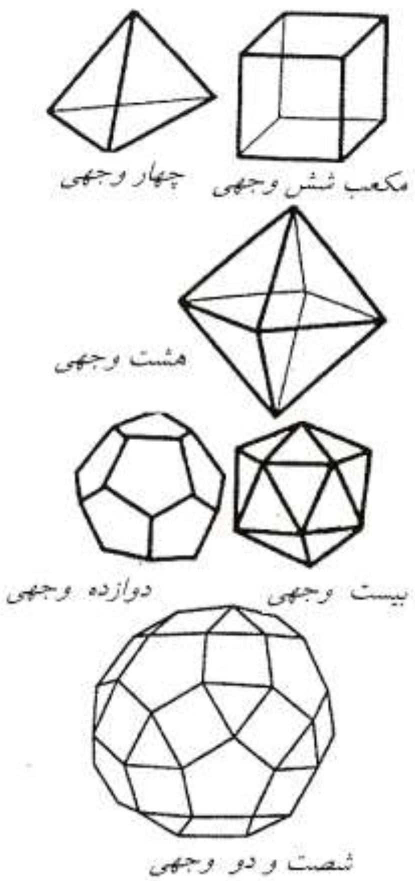
مفاهیم ریاضی بسیاری وجود دارند که در حوزۀ ریاضیات محدودیتی ندارند، اما هنگامی که به جهان واقعی اعمال شوند حدودی دارند. مثلاً اگر سه جعبه از مرمر ۲۱ کیلو گرم وزن داشته باشد، وزن چند جعبه ۸۴ کیلو گرم می شود؟ برقراری یک تناسب برای حل آن

کافی است ـ ۸۴ کیلو گرم / ؟ جعبه = ۲۱ کیلو گرم / ۳ جعبه ـ اما حل تمام مسائل تناسب واقع بینانه نیست. آیا می توان هر درختی را تا هر اندازه ای کوچک کرد و در عین حال قابل استفاده و عملی باشد؟ آیا کسی با هر اندازه ای می تواند موجود باشد؟ ترکیب یک شیء، چه درخت یا استخوان های انسان، نقشی حیاتی در تعیین حدود بالا و پایین اندازهٔ آن دارد. وجود انسان سی متری امکان پذیر نسیت، چون ساختار مصالحی که بدن انسان را می سازد برای چنین اندازهٔ ماموت گونه ای در نظر گرفته نشده اند. حتی درخت های سکویای غول آسا در ارتفاع محدودیتی دارند، که ریشه و ویژگی های چوب آن را تعیین می کند. یکی از نخستین مطالب در مورد بزرگ تر کردن اشیا در اثر گالیله به نام گفتگو دربارهٔ دو علم جدید آمده است.

هندسه ها ــ قدیم و جدید

چیزهای فوق العاده ای را کشف کردم که مرا شگفت زده کرده است... جهان جدیدی را از هیچ آفریده ام. «انوش بایای، از نامه ای به پدیرش در سال ۱۸۲۳»

فرمول جادویی اویلر



ویژگی های اندیشه های ریاضی این است که هنگامی که درست بودن آنها تثبیت می شود در تمام موارد به قوت خود باقی می مانند.

به لئونارد اویلر ریاضیدان سوییسی کشف های ریاضی بسیاری، بویژه در حوزهٔ توپولوژی نسبت داده می شود. می گویند راه حل او برای مسئلهٔ پل کونیگزبرگ آغازگر بررسی شبکه های توپولوژیکی بوده است. توپولوژی آن خواص اشیا را بررسی می کند که به کج و کوله کردن آنها تغییر نمی کنند. مثلاً مکعب می تواند با کشیدن و چلاندن به چهار وجهی تغییر شکل پیدا کند و برعکس. بدیهی است که اندازه و نیز تعداد وجوه، رأس ها یا لبه ها می تواند تغییر کند. در نتیجه می توان از خود پرسید که چه نوع خواص تغییر نیافته ای قابل مشاهده باقی می ماند؟ یکی از نکات مورد توجه این است که هر نقطه ای درون مکعب نقطه ای درون جهار وجهی باقی می ماند. به غیر از توپولوژی، قضیهٔ جالبی که اویلر دربارهٔ نوعی ویژگی تغییر ناپذیر چند وجهی ها ثابت کرد این است که اگر تعداد وجوه یک چند وجهی را به تعداد رأس هایش اضافه کنیم، و سپس تعداد لبه ها را کسر کنیم، حاصل همیشه ۲ خواهد شد. در مورد اشکال افلاطونی نشان داده شده آن را امتحان کنید. احساس می کنید پر انرژی هستید، آزمایش کنید.

E_F + V =۲

فصل هفتم ؛ ریاضیات نغمهٔ خود را می نوازد

ریاضیات و گام های موسیقی

از دوران باستان، ریاضیات برای توضیح موسیقی به کار رفته است. امروزه الگوسازی و رقمی سازی کامپیوتری، کوانتومی کردن موسیقی و صداها همراه با بررسی کیفیت و معماری صوتی احساس های جدید صوت را پدید می آورند.

در طی قرنها موسیقی و ریاضیات با هم ارتباط داشته اند. در سده های میانه، برنامهٔ آموزشی حساب، هندسه، اخترشناسی و موسیقی را در یک گروه دسته بندی می کردند. کامپیوترهای امروزی این پیوند را تداوم بخشیده اند.

نت نویسی نخستین حوزهٔ آشکاری است که در آن ریاضیات تاثیر خود را بر موسیقی به نمایش می گذارد. در نوشتن موسیقی ضرب (تمپو) میزان، نت های گرد، نت های سفید، نت های سیاه و نت چنگ و غیره را می توان یافت. نوشتن موسیقی برای قرار دادن تعداد معینی نت بر میزان شبیه به یافتن مخرج مشترک است- نت های دارای طول های مختلف را باید در هر ضرب معین با میزان ویژه ای هماهنگ کرد. آهنگساز آهنگی می سازد که چنین زیبا و چنین آسان در ساختار نوشته شدهٔ پارتیتور قرار داده شده است. اگر کاری که کامل شده است مورد تحلیل قرار گیرد هر میزانی تعداد معینی ضرب دارد که از طول نت های مختلفی استفاده می کنند.

در قرن ششم پیش از میلاد، فیثاغورس و فیثاغورسیان نخستین کسانی بودند که موسیقی را با ریاضی پیوند دادند. آنان بر این باور بودند که اعداد، از جهاتی بر همه چیز حاکم بودند. شادی آنان را پس از کشف اکتاو نت، دوره ای بودن نت ها، و نسبت نت های یک ساز تجسم کنید. علاوه بر آن، آنان اعتقاد داشتند که سیاره ها موسیقی خود را دارند، اجرام آسمانی صداهای آهنگین تولید می کنند. این اندیشه «موسیقی افلاک» نامیده می شود. کپلر به موسیقی افلاک اعتقاد داشت و در واقع برای هر یک از سیاره های شناخته شده آهنگ ساخت. امروزه اختر شناسان علائمی رادیویی را که بادهای خورشیدی حامل آنند دریافت کرده اند. این صداها، که دربردارنده سوت، صدای بامب، زوزه و فش و فش اند هنگامی که با سرعت های زیاد با هم ترکیب شوند خوش آهنگ تر می شوند. دانشمندان نوسان هایی را از خورشید نیز مشاهده کرده اند که حدس می زنند ارتعاشاتی را با دوره های تناوب مختلفی تولید می کنند.

علاوه بر ارتباط آشکار ریاضیات و نت نویسی، موسیقی با نسبت ها، منحنی های نمایی، تابعهای تناوبی و علوم کامپیوتری نیز پیوند دارد.

بدون درک ریاضیات موسیقی، پیشرفت در استفاده از کامپیوتر در آهنگسازی و ساخت سازها امکان ناپذیر بوده است. کشفیات ریاضی، یعنی توابع تناوبی، در ساخت سازهای مدرن و تولید صداهای کامپیوتر ساخته نقشی اساسی داشته است. بسیاری از سازندگان این سازها نمودارهای صداهای متناوب محصولات خود را با نمودارهای دلخواه این سازها مقایسه می کنند. همانندهی پخش سازهای الکترونیکی رابطه ای تنگاتنگ با نمودارهای تناوبی دارد. موسیقیدانان و ریاضیدانان به ایفای نقشی بخ یک اندازه مهم در تولید و باز آفرینی موسیقی ادامه خواهند داد.

فصل هشتم ؛ انقلاب کامپیوتر ها

نگاهی به اکنون

اینکه انسانی برجسته فقط وقت خود را مانند بردگان برای محاسبه ای تلف کند که بتوان با اطمینان به هر کس دیگری با استفاده از ماشین واگذار کرد، دون شأن اوست. «گوتفرید ویلهم فن لا یب نیتس»

- **در درختان ما نیز کامپیوتر هست:**

الگوی رشد درختان را می توان با استفاده از شبکه های ریاضی و برخال تعیین و ترسیم کرد. از کامپیوتر می توان در مدل سازی آتش سوزی جنگل ها ، و بدین وسیله پدید آوردن راهبردهای جلوگیری از ایجاد یا مهار آتش سوزی، استفاده کرد. همچنین از کامپیوتر ها به شکل گسترده ای در ثبت سوابق درختان شهر ها ، در تلاش برای حفظ سلامت درختان استفاده می شود.آمار های حیاتی ، نوع هرس کردن ، آمار زیست محیطی ، آلودگی ها و آثار محیطی از طریق کامپیوترها به ثبت می رسد.

نگاهی به آینده

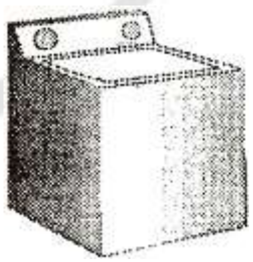
- **فضای شبکه ای سیبرنیتکی واقعیت مجازی**

در قرن بیستم ، دانشمندان کامپیوتر، ریاضیدان ها ، فناوری کامپیوتر و خطای باصره را با آفرینش جهان های مصنوعی به اوج رسانده اند . بیننده مجهز به سازو برگ های گوناگون تنها یک بیننده نیست بلکه عملا به دنیایی وارد می شود که ساخته کامپیوتر است.

منطق فازی و کامپیوتر

منطق فازی می تواندر ـــ

- ماشین لباسشویی شما باشد، اگر ماشین شما بهترین چرخه از سطح آب ورودی، مقدار، جنس، کثیف بودن و میزان لکه ها را تعیین کند، پس از یک چرخهٔ شستشو، اگر آب به اندازه کافی تمیز نباشد ماشین چرخه را تکرار می کند.
- جارو برقی شما باشد، اگر بتواند مکش را به طور خودکار برپایهٔ اطلاعات به دست آمده از حسگرهای فروسرخ تنظیم کند.



فرض کنید قطعه چوبی را بردارم و در بخاری هیزمی خود بیندازم. فوراً شروع به سوختن می کند. دقیقاً چه وقت دیگری یک تکه چوب بشمار نمی آید؟ یک نفر ممکن است بگوید درست پس آن که آتش می گیرد. دیگری ممکن است احساس کند پس از آنکه نیمی از آن سوخت، و کس دیگری می تواند اعتقاد داشته باشد که تا آخرین بقایایش هنوز یک تکه چوب است. هر قدر هم که یک فرد منطقی بکوشد به این پرسش پاسخ دهد، تعریف قاطعی برای آن وجود ندارد. پرسش درست یا نادرست وجود ندارد. راهی برای نشان دادن پاسخ کمیت پذیر وجود ندارد. پاسخ می تواند کمتر یا بیشتر باشد. قرار ملاقات رأس ساعت ۵ بعد از ظهر برای همه یک معنی دارد. اما بعد از ظهر برای یک نفر ساعت سه و سی دقیقه و برای دیگری پنج و سی دقیقه است. در واقع زمان های احتمالی زیادی وجود دارد که به شخص مورد سؤال بستگی پیدا می کند، و در بسیاری مسائل در زندگی این مطلب صادق است، زیرا این ماهیت ذهنی زندگی و جهان است. منطق درست یا نادرست؛ آری یا نه، نمی تواند به این گونه موقعیت ها یا وضعیت دگرگون شوندهٔ چیزهای روی زمین و در جهان بپردازد. این مسائلی است که منطق فازی با آن سر و کار دارد.

منطق «فازی» راه جدید نگاه کردن به مسایل و تحلیل جهان است. نام منطق فازی را لطفی زاده استاد برکلی در سال های ۱۹۶۰ وضع کرده است.

میتسوبیشی HSR-IV برای جلوگیری از تصادف با استفاده از سامانهٔ تداخل فازی اعصاب طراحی شده است.

منطق سنتی برای تغیرات تدریجی موقعیت ها جایی ندارد. گرچه سرچشمه های منطق فازی در ایالات متحده بوده است فیلسوفان و دانشمندان شرقی از آن استقبال کرده اند. درست همانطور که شکل های ریاضی دقیقاً اشیاء جهان ما را توصیف نمی کنند، منطق سنتی نیز نمی تواند به طور کامل بر جهان واقعی اعمال شود. منطق سنتی و برنامه ریزی کامپیوتری بر گزاره های درست یا نادرست («روشن» یا «خاموش» برقی ـ «۱»، و «صفر» در دستگاه دو دویی) استوارند. منطق فازی باید برای انسانی کردن کامپیوتر به صحنه بیاید. منطق فازی می کوشد تا از کار مغز انسان تقلید کند. به عبارت دیگر می کوشد تا هوش مصنوعی را به هوش واقعی تبدیل کند.

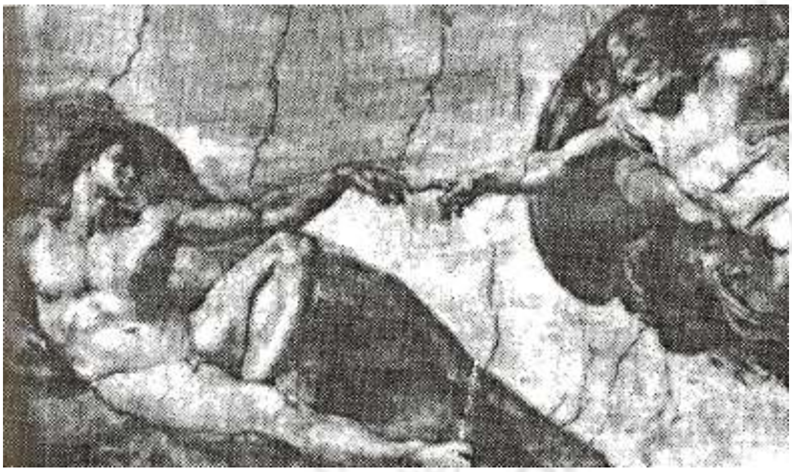
در نمایشگاه موتور توکیو ۱۹۹۳، کامپیوتر مورد استفاده در نمونهٔ اولیه IV-HIR میتسوبیشی، از منطق فازی در تقلید پردازش اطلاعات در مغز راننده سود می برد. این کامپیوتر عادات معمول زندگی را بررسی واکنش به موقعیت های گوناگونی را که ممکن است پیش آید انتخاب می کند. مثلاً اگر رادار کار گذاشته شده مانعی را تشخیص دهد، سامانهٔ منطق فازی تصمیم می گیرد که راننده (بر پایهٔ مدل های رانندگی در گذشته) از آن آگاه شود یا نشود. اگر راننده آنگونه که پیش بینی شده است واکنش نشان ندهد، سامانه می تواند بطور خودکار برای جلوگیری از خودکار برای جلوگیری از تصادف به ترمزها فرمان دهد.

فصل نهم ؛ ریاضیات و رازهای زندگی

ریاضیات و رازهای زندگی

تنها هنگامی می توانیم زندگی و زیبایی را موجوداتی «کاملاً ریاضی» بدانیم که خود ریاضیدانی با قابلیتی نامحدود باشیم و بتوانیم ویژگی های آنها را در ریاضیاتی چنان پیچیده بیان کنیم که تا کنون آن را اختراع نکرده ایم. «تئودور آندرا کوک(۱۹۲۸ـ۱۸۶۷)»

جهان علم دائماً از اندیشه های ریاضی برای گشودن رازهای حیات استفاده می کند.



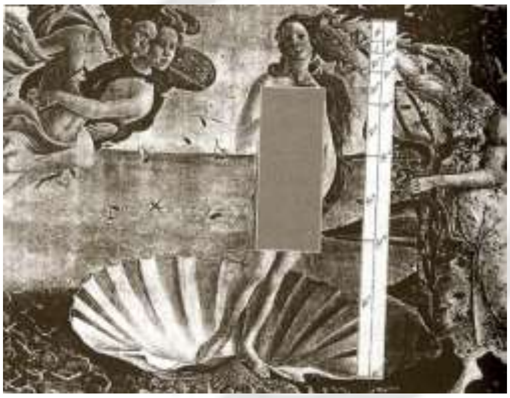
آفرینش آدم اثر میکلانژ، کلیسای سیستین، واتیکان، ایتالیا.

ریاضی کردن بدن انسان

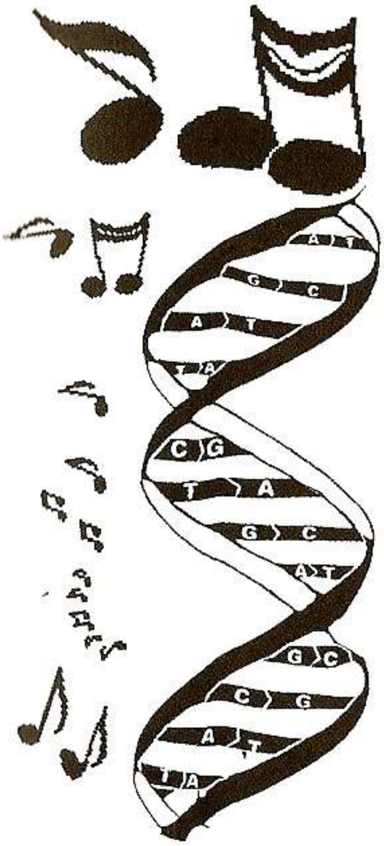
در بدن ما، شبکه های دستگاه قلب و عروق، تپ های الکتریکی که بدن ما برای آغاز حرکت از آنها استفاده می کند، راه های برقراری ارتباط سلول ها، طرح استخوان ها، ساخت ملکولی ژن ها ـ همه دارای عناصری ریاضی اند. در نتیجه در تلاش برای کمّی کردن کارکردهای بدن انسان، علم و پزشکی به اعداد و سایر مفاهیم ریاضی متوسل شده است. مثلاً، ابزار هایی برای تبدیل تپ های الکتریکی بدن به منحنی های سینوسی ساخته شده اند که بدین وسیله مقایسهٔ بروندادها (خروجی) امکان پذیر شده است. خواندن نوار قلبی، ثبت فعالیت های الکتریکی عضله ها، سونوگرافی ـ به شکل منحنی، دامنه و اختلاف فاز را نشان می دهند. تمام اینها اطلاعاتی را به تکنسین های آموزش دیده می دهند. اعداد، نسبت ها، و نمودارها ویژگی هایی ریاضی اند. که با بدن ما تطبیق داده شده اند. اجازه دهید مفاهیم ریاضی و چگونگی پیوند آنها با بدن را بررسی کنیم.

اگر فکر می کنید رمزگشایی و هیروگلیف های مایایی هیجان انگیز و چالش برانگیزند، تصورش را بکنید که توانایی در گشایش رمزهای ملکولی مورد استفادهٔ بدن برای برقراری ارتباط چگونه می تواند باشد. علم اینک کشف کرده است که گلبول های سفید خون با مغز ارتباط دارند. ذهن و بدن از طریق واژگان زیست شیمیایی ارتباط برقرار می کنند. رمزگشایی از این رمز های بین سلولی اثری شگفت انگیز بر پزشکی دارد. درست همان طور که درک فزایندهٔ ما از رمز وراثتی بسیاری از رخدادها در حوزهٔ سلامت را آشکار می سازد. کشف مارپیچ دوگانه در DNA پدیدهٔ ریاضی دیگری بود. اما این مارپیچ تنها مارپیچ موجود در بدن نیست. مارپیچ همزاویه در بسیاری از حوزه های رشد وجود دارد ـ احتمالاً به دلیل آن که شکل آن با رشد کردن تغییر نمی کند. به مارپیچ همزاویه در الگوی رشد موهای سر، و استخوان های بودن خود، حلزون گوش داخلی، بندناف، و شاید حتی اثر انگشت خود نگاهی بیندازید.

فیزیک و ویژگی های فیزیکی بدن نیز به اندیشه های دیگر ریاضی می انجامد. بدن دارای تقارن است، که به آن توازن و مرکز گرانش می بخشد.هنرمندانی مانند لئوناردو داوینچی و آلبرشت دورر، کوشیده اند تا تطابق بدن با تناسب ها و اندازه های گوناگونی مانند نسبت طلایی را نشان دهند.



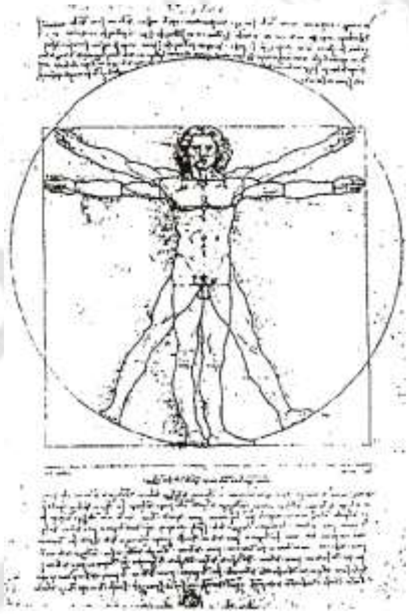
با بررسی بدن در سطح ملکولی، به ارتباط هایی با ریاضیات پی می بریم. شکل های هندسی مانند چندوجهی ها و گنبدهای نیمکره ای در انواع مختلف ویروس های مهاجم مشاهده می شوند. در ویروس ایدز (HTLV-1) تقارن بیست وجهی و ساختمان گنبد نیمکره ای یافت شده است. گره های موجود در پیکره بندی های DNA دانشمندان را به استفاده از یافته های ریاضی دربارهٔ نظریهٔ گروه ها تا بررسی حلقه ها و گره های تشکیل یافته در رشته های DNA رهنمون شده است. یافته های نظریهٔ گره ها و اندیشه های هندسه های مختلف در بررسی مهندسی ژنتیک ارزشمند بوده است.



موسیقی بدن

دربارهٔ زبان بدن که پیام های گوناگونی را با حرکت و حالات بدن ما پدید می آورد بسیار شنیده ایم. اما موسیقی بدن چیست؟ تعدادی از دانشمندان[۱۰] الگوهایی را کشف کرده اند که از چشم انداز دیگری در DNA یافت می شود ـ موسیقی ژن ها، در نوار مارپیچی دربازی های سازگار[۱۱] خود به هم متصل شده اند تا مارپیچ دوگانهٔ آرایش DNA را پدید آورند. این بازها دارای رمزهای ژنتیکی اند و همراه با DNA طرح های کلی سلولی زنده را تشکیل می دهند. الگوی این بازها کاملاً به امید رمز گشایی از معنی های آنها بررسی شده اند. مشاهده شده است که رشته های تکرار شوندهٔ بازها در سراسر ژن ها وجود دارند. پیوندی موسیقیایی در هنگامی ظاهر می شود که این رشته های تکرار شونده را ملودی های یک آهنگ در نظر بگیریم. در واقع بسیاری از آنها را در یک اکتاو و فاصله های دیگر قرار داده اند.

رازهای انسانِ دورانِ نوزایی



این طرح مشهور لئوناردو دوینچی در کتاب تناسب های الهی است. که لئوناردو برای لوکا پائولی ریاضیدان در سال ۱۵۰۹ کشیده است. لئوناردو بخش مشروحی را دربارهٔ تناسب های بدن انسان در یادداشت هایش نوشته است. او اندازه ها و تناسب هایی را برای تمام بخش های بدن، از جمله سر، چشمان، گوش ها، دست ها و پاها مشخص کرده است. تناسب های او بر بررسی های اعداد، مشاهدات و اندازه گیری ها استوار است. او در یادداشت های خود به آثار ویترووویوس، معمار رومی (حدود ۳۰ پیش از میلاد) نیز اشاره کرده است، که به تناسب های بدن انسان پرداخته است. لئوناردو نوشته است چگونه از ویترووویوس تاثیر پذیرفته است:

ویترووویوس معمار در آثارش دربارهٔ معماری می گوید اندازه های بدن انسان را طبیعت اینگونه تقسیم بندی کرده است:...

اگر پاهایتان را طوری باز کنید که قدتان ۱/۱۴ کمتر شود و دست هایتان را باز کنید و بالا بیاورید تا انگشت میانی شما به تراز بالای سرتان برسد مرکز دست و پاهای باز شدهٔ شما در ناف و فضای بین پاهایتان مثلثی متساوی الاضلاع خواهد بود.

لئوناردو می افزاید طول دستان بازشدهٔ شما به اندازهٔ قدتان است.[۱۲]

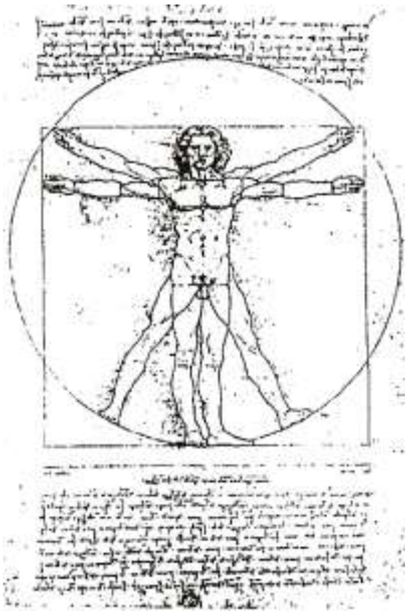
---

[۱۰] دکتر سوزو سواُهنو از بخش زیست شناسی نظری بنگاه پژوهشی بکمن در شهر هوپ، دارتور، کالیفرنیا.

[۱۱] تنها تعدادی از بازها با هم جفت می شوند. A با T و G با C. چگونگی ظاهر شدن آنها در رشته، رمز ژنتیکی DNA را می سازد.

[۱۲] یادداشت های لئوناردو داوینچی، جلد ۱. انتشارات داور. نیویورک. ۱۹۷۰

رازهای انسانِ دورانِ نوزایی (!!)



این طرح مشهور لئوناردو دوینچی در کتاب تناسب های الهی است. که لئوناردو برای لوکا پائولی ریاضیدان در سال ۱۵۰۹ کشیده است.

لئوناردو بخش مشروحی را دربارهٔ تناسب های بدن انسان در یادداشت هایش نوشته است. او اندازه ها و تناسب هایی را برای تمام بخش های بدن، از جمله سر، چشمان، گوش ها، دست ها و پاها مشخص کرده است. تناسب های او بر بررسی های اعداد، مشاهدات و اندازه گیری ها استوار است. او در یادداشت های خود به آثار ویتروویوس، معمار رومی (حدود ۳۰ پیش از میلاد) نیز اشاره کرده است، که به تناسب های بدن انسان پرداخته است. لئوناردو نوشته است چگونه از ویتروویوس تاثیر پذیرفته است:

ویتروویوس معمار در آثارش دربارهٔ معماری می گوید اندازه های بدن انسان را طبیعت اینگونه تقسیم بندی کرده است:...

اگر پاهایتان را طوری باز کنید که قدتان ۱/۱۴ کمتر شود و دست هایتان را باز کنید و بالا بیاورید تا انگشت میانی شما به تراز بالای سرتان برسد مرکز دست و پاهای باز شدهٔ شما در ناف و فضای بین پاهایتان مثلثی متساوی الاضلاع خواهد بود.

لئوناردو می افزاید طول دستان بازشدهٔ شما به اندازهٔ قدتان است.

گره ها در رازهای زندگی

از زمانی که اسکندر مقدونی گرهٔ گوردیوم را برید[۱۳] گره و شکل های مختلف آن بر بسیاری از جنبه های زندگی ما سایه افکنده است. موضوع گره ها توجه جادوگران، دانشمندان، فیلسوفان را جلب کرده است. گره سه برگی، گرهی که سر و ته ندارد، از جملهٔ آنهاست. امروزه دانشمندان به گره ها به گونه ای می نگرند که گویا شماری از راه حل های رازهای زندگی را در خود دارند. این نظریه ها از جهان های کیهانی تا جهان های ذره بینی را در بر می گیرند.

طرح گره سلتی از انجیل یوحنا، کتاب دورار. از طرح سلتی اثر ادوارد سیبت

در نخستین نگاه این تصور پیش می آید که مسئلهٔ ویژه ای در مورد گره ها وجود ندارد، مگر برای نگهداشتن یا بستن چیزی، مثلاً کفش یا مهار قایق ها. اما رشته ای در ریاضیات به نام نظریهٔ گره ها وجود دارد، و دائماً کشف هایی در مورد ارتباط مستقیم این نظریه با جهان واقعی می گیرد.

نظریهٔ گره ها حوزهٔ کاملاً جدیدی در توپولوژی است.

گره سه برگی

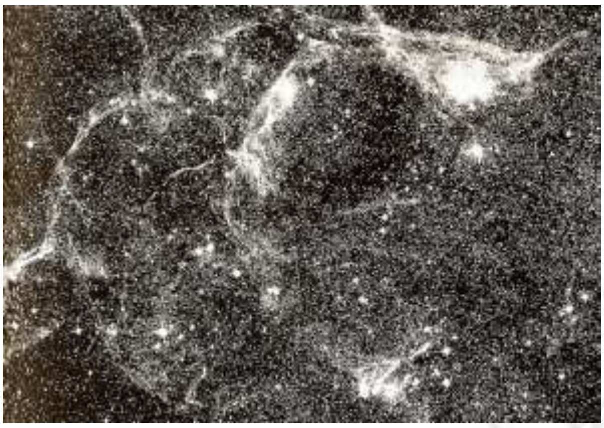
---

[۱۳] اسکندر در سال ۳۳۳ پیش از میلاد هنگام عبور از آناتومی به گوردیوم پایتخت فریگیه رسید گوردیوس بنیانگذار این شهر با گرهی که سر آن مخفی بود تیرکی را محکم بسته بود که تنها فاتح آسیا می توانست آن را باز کند. می گویند اسکندر آن را با شمشیر برید. عبارت «بریدن در گره گوردیوم» به حل جسورانهٔ مسائل پیچیده اشاره دارد.

آنچه گره های ریاضی را از گره های معمولی متمایل می سازد این است که آنها سر ندارند. این گره ها حلقه های بسته ای هستند که نمی توانند به شکل دایره درآیند.
آنچه ریاضیات باید انجام دهد دسته بندی آنها و مشخص کردن گره های مختلف است.

از چپ به راست: گره اول چهار تقاطع، دومی پنج تقاطع، سومی شش تقاطع، شهارمی و پنجمی هفت تقاطع دارند.

اخیراً تلاش های بسیاری انجام گرفته و ارتباط های جالبی کشف شده است که نظریهٔ گره ها را به زیست شناسی ملکولی و فیزیک پیوند می دهد. دانشمندان در این حوزه ها از یافته های ریاضیدانان استفاده کرده اند و روش های جدید نظریهٔ گره ها را در بررسی پیکر بندی DNA به کار گرفته اند. پژوهشگران پی برده اند که نوارهای DNA می توانند حلقه هایی تشکیل دهند که گاهی گره می خورند. اینک دانشمندان می توانند از یافته های نظریهٔ گره ها در تعیین این که نوار DNA را که مشاهده می کنند پیش از این به شکل گره دیگری ظاهر شده است، استفاده کنند. آنها می توانند توالی مراحلی را نیز تعیین کنند که در آن نوارهای DNA می توانند تغییر یابند تا پیکره بندی ویژه ای را پدید آورند و پیکر بندی های مشاهده نشدهٔ DNA را پیش بینی کنند. تمام این یافته ها می توانند در مهندسی ژنتیک بسیار سودمند باشند.



به همین ترتیب، در فیزیک نظریهٔ گره ها در بررسی بر هم کنشی ذراتی که شبیه به گره هستند بسیار سودمند بوده است. از پیکره بندی گره می توان در توصیف بر هم کنش هایی استفاده کرد که ممکن است رخ دهند. فیزیکدانان کاشف نظریهٔ همه چیز (TOE) اعتقاد دارند که گره ها نقشی اساسی در آفرینش جهان بازی کرده اند. دانشمندان در جستجوی نظریهٔ همه چیز می کوشند تا مدلی ریاضی بسازند که نیروهای طبیعت (الکترو مغناطیس، گرانش، نیروهای قوی و نیروهای ضعیف) را وحدت بخشد. فیزیکدانان مطمئن هستند که این نظریه را می توان یافت. عده ای تمام عمر کاری خود را در جستجوی پاسخ هایی به آن صرف کردند. در متداول ترین «نظریهٔ همه چیز» امروز، تعدادی از دانشمندان بر این باورند که اساس جهان به اشیایی به نام ابر ریسمان وابسته است. یکی از اشکال نظریهٔ همه چیز بر آن است که جهان، تمام اشکال ماده و انرژی، از لحظهٔ انفجار بزرگ از کنش ها و برهمکنش های اَبر ریسمان ها ناشی شده اند. نظریهٔ ابر ریسمان جهان را به صورت ۱۰ بعدی (۹ بعد مکانی و ۱ بعد زمانی) توصیف می کند که اجزای سازندهٔ ماده و انرژی آن ریسمان های بی نهایت کوچک اند. فراتر از آن، این نظریه می گوید که در لحظهٔ انفجار این ۹ بعد برابر بوده اند. سپس تنها ۳ بعد مکانی به آن انبساط یافته اند. ۶ بعد دیگر در هم پیچیده و در شکل های به اندازهٔ $۱۰^{-۳۳}$سانتی متر محصور مانده اند (یعنی از یک سر تا سری دیگر $۱۰^{۳۳}$ آنها ۱ سانتی متر است). بدین ترتیب عقیده بر آن است که این ریسمان ها ۶ بعد در داخل خود دارند. دانشمندان اینک می کوشند تا آنها را با استفاده از مدل های توپولوژی ۶ بعدی توصیف کنند. عقیده بر آن است که این ریسمان ها ممکن است باز باشند یا به صورت حلقه ای بسته باشند، و اشکال مختلف ماده و انرژی جهان را با تغییر ارتعاشات و چرخش های خود بوجود آورند. به عبارت دیگر، اَبر ریسمان با ارتعاش و چرخش خود از هم باز شناخته می شود.

اهمیت نظریه اَبَر ریسمان را با نظریهٔ نسبیت عام اینشتین مقایسه می کند. تجسم چهار بعد خود به اندازهٔ کافی دشوار بود. اینشتین مطرح کرد که به طول، عرض، ارتفاع و زمان برای مشخص کردن جایگاه اشیاء در جهان نیاز است. ۱۰ بعد به نظر غیر ممکن می رسید. اما اگر ابعاد را اعداد توصیفی بدانیم که موقعیت و ویژگی های اشیاء را در جهان دقیقاً مشخص می کنند بیشتر قابل فهم می کند.

ریاضیات پشتیبان نظریهٔ همه چیز ریسمان بسیار کارآمد است. نتایج بسیار قابل قبول بوده است. شارتز و مایکل گرین دو تن از مهم ترین پیشگامان این نظریه بوده اند. آنان با وجود پشتیبانی و حمایت ناچیز دانشگاه ها، که جهان ۱۰ بعدی را به سختی می پذیرفتند، پیش از ۲ دهه در این زمینه کار کردند. مقالهٔ منتشر شده از سوی آنان سرانجام فیزیکدانان را بر آن داشت تا این اندیشه را جدی بگیرند. تعدادی از دانشمندان معتقد بودند که فیزیکدانان از پژوهش در این اندیشه به این دلیل پرهیز می کردند که ریاضیات آن بسیار دشوار است. اَبَر تقارن، مدل های توپولوژیکی ۶ بعدی، جهان ۱۰ بعدی و ریسمان بی نهایت کوچک تعدادی از مفاهیم مورد نیاز برای تشریح و اثبات این نظریه اند. در نتیجه، این نظریه بعضی از فیزیکدانان را به ریاضیدانان و برعکس تبدیل کرده است. این تازه آغاز کشفیات و کاربردهای شاخهٔ ریاضی نو ظهور نظریهٔ گره هاست.

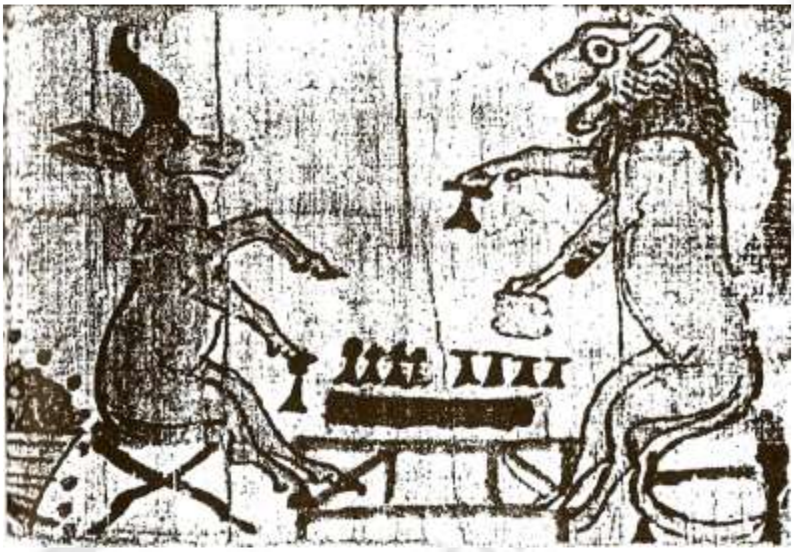
فصل دهم ؛ ریاضیات و معماری

ریاضیات و معماری

مکانیک بهشت ریاضیات است زیرا در آن به میوه های ریاضیات می رسیم. «لئوناردو داوینچی»

طاق ـ ریاضیات قوس

در پشت دیوار، خدایان بازی می کنند؛ آنها با اعداد بازی می کنند، که جهان از آن ساخته شده است. «لوکربوزیه(۱۹۶۵ـ۱۸۸۷)»



انسان ها همیشه بازی کرده اند و به معما پرداخته اند. کتاب هایی که به سرچشمهٔ بازی های مختلف پرداخته اند نمونه هایی از بازی های باستانی را نشان می دهند که امروز هم اجرا می شود. این عکس از پاپیروکسی مصری است که قدمت آن به ۱۲۰۰ پیش از میلاد باز می گردد. این نمایش مضحک بز و شیری است که «سِنِت» بازی می کند. این بازی متداول ترین بازی زمان خود بود، و تمام گروه های مردم آن را بازی می کردند. متأسفانه مدارکی باقی نمانده است که نشان دهد این بازی دقیقاً چگونه انجام می گرفته است. اما یکی از اشکال آن با استفاده از یافته ها و آثار باستان شناسان طرح ریزی شده است.

افسون منطق، سرگرمی و بازی

منطق هنر اشتباه کردن با اعتماد به نفس است. «موریس کلاین»

منطق و ریاضی قطعاً با هم همراهند. اما بیشتر افراد ریاضی را بازی و سرگرمی بشمار نمی آورند. حال آنکه بازی ها و سرگرمی ها بخشی جدایی ناپذیر از ریاضیاتند. پدید آمدن بسیاری از اندیشه های ریاضی حاصل دنبال کردن یک مسئله یا مفهوم کنجکاوی برانگیز بوده است. به نظر می رسد

نیرویی نادیدنی بعضی افراد را به سوی ساعت ها کار دربارهٔ مسائل و معماها می راند. آنان به گروهی تعلق دارند که از ریاضیات لذت می برند و مجذوب آن می شوند. ممکن است انسان، پیش از آنکه آن را عملی سازد، ساعت ها و روزها را صرف کشف پیامدهای چیزی کند که ظاهراً قرار بوده است تنها یک وقت گذرانی ساده باشد. تاریخ گواه بر آن است که مسائل، چالش ها، بازی ها و سرگرمی ها گاهی به کشف هایی بزرگ، و حتی به آفریدن حوزه های جدیدی در ریاضیات انجامیده است. در واقع، ارشمیدس، ریاضیدان بزرگ یونانی به این دلیل کشته شد که مجذوب مسایل ریاضی شده بود.

در حدود سال ۲۱۲ پیش از میلاد، سیراکوس به دست رومیان افتاد. ارشمیدس، در آن زمان، در منزل خویش بر روی مسئله ای ریاضی کار می کرد. هنگامی که سربازی رومی وارد منزل او شد و به او دستور داد کارش را متوقف کند، ارشمیدس توجهی به او نکرد و سرباز خشمگین او را با شمشیر کشت.

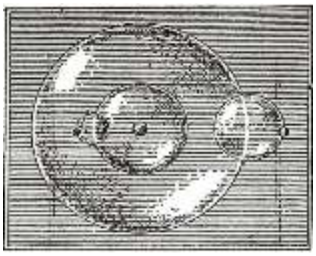
جهان های ریاضی در ادبیات

حتی در علم ریاضی نیز تخیل شگفت انگیزی وجود دارد. «ولتر»

آیا اَبَر مکعب ساخته و پرداخته تخیل ریاضی است؟ آیا تنها بعد واقعی، بعد سوم است؟ در هندسهٔ اقلیدسی می آموزیم که یک نقطه تنها یک مکان را نشان می دهد و نمی توان آن را دید، زیرا ابعاد آن صفر است. اما می توانیم یک پاره خط را که از همین نقاط نادیدنی ساخته شده است ببینیم. یک خط از نظر طول بی انتهاست، اما چنین چیزی در قلمرو زندگی ما وجود دارد؟ صفحه چطور؟ اندازه دو بعد آن بی نهایت و ضخامت آن تنها به اندازه یک نقطه است. صفحه در جهان ما چیست؟ شبه کره ای را در هندسهٔ هزلولی در نظر بگیرید؛ همچنین خط های مجانب توابع نمایی و بی نهایت های عددهای ترامتناهی را. اعداد موهومی را در نظر بگیرید، همچنین صفحهٔ اعداد مختلط، برهال ها یا حتی دایره را. براستی آیا اینها در جهان ما وجود دارند؟ این مفاهیم در جهان ما مدل هایی بیش نیستند. هرچند که بی تردید در نظام های ریاضی مربوط به خود وجود دارند.
بسیاری از نویسندگان، هنرمندان و ریاضیدانان از این مفاهیم برای توضیح جهان هایی که این اندیشه ها در آن به دنیا می آیند به طرز مبتکرانه ای سود بردند. نویسندگانی چون دانته، ایتالو کالواینو، خورخه لوئیس بورخس، و مادلن لانگل از ریاضیات برای نوآوری بیشتر در آثار خود الهام گرفته اند.
در قرن نوزدهم، هانری پوانکاره ریاضیدان مدلی از قلمرو هزلولی ها را درون یک دایره عرضه کرد که این قلمرو دایره ای شکل، برای تمام چیزها و ساکنان آن نامتناهی بود. این موجودات آگاه نبودند که همه با دور شدن از مرکز دایره کوچک می شوند، درحالی که با نزدیک شدن به مرکز، بزرگ خواهند شد. یعنی هرگز نمی توان به لبهٔ دایره رسید و بنابراین، آنان جهان خود را نامتناهی می بینند. در سال ۱۹۵۸ هنرمندی بنام موریس اشر مجموعه ای از باسمه های چوبی با نام های مرز دایره ای I، II ،III، IV ساخت که احساسی را از آنچه پوانکاره توضیح داده بود تداعی کرد. اشر آنها را «زیبایی این جهان نامتناهی در یک صفحهٔ محسور» توصیف کرده است.

مرز دایره ای IV (بهشت و روزخ) اثر اشر، جهانی را تصور می کند که یاد آور جهان هذلولی هانری پوانکاره است.

با بیاد آوردن سده های میانه و کمدی الهی دانته، می بینیم که شکل های هندسهٔ اقلیدسی پایه های دوزخ دانته بودند. از شکل مخروطی برای نگه داشتن انسان ها در طبقات دوزخ استفاده شده است. دانته در داخل آن نُه مقطع دایره ای در نظر گرفته است که بعنوان سکوهایی برای دسته بندی انسان ها بر اساس گناهانی که مرتکب شده اند بکار می رود.



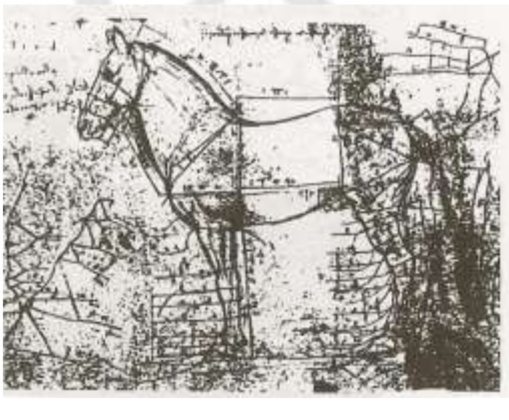
در قرن بیستم، مفهوم بینهایت در کتاب ماسه ها از خورخه لوئیس برخس به تصویر درآمده است. در این اثر شخصیت اصلی، کتابی «حیرت انگیز» پیدا می کند. «تعداد صفحه های کتاب از بینهایت کمتر یا بیشتر نیست. نه صفحه اول هست نه صفحه آخر. نمی دانم چرا به این روش تصادفی شماره گذاری شده اند. شاید می خواهند جمله های یک سری نامحدود باشند که هر عددی را می پذیرد.» این کتاب به شکل نامطلوبی زندگی و نگرش او را نسبت به چیزها دگرگون می کند تا آنکه پی می برد باید راهی برای خلاص شدن از آن بیابد ـ «به آتش فکر کردم، اما ترسیدم که سوختن کتابی نامتناهی نیز ممکن است نامتناهی نیز ممکن است بی پایان از آب در آید و کره زمین را از دود خفه کند.» راه حل شما چیست؟ ممکن است بخواهید کتاب را بخوانید تا بفهمید که قهرمان داستان چگونه از این تنگنا بیرون آمد.

نویسندگان داستان های علمی تخیلی از اندیشه های ریاضی برای کمک به خلق جهان های خود سود برده اند. مثلاً، در یکی از بخش های کتاب پیشتازان فضا ـ نسل بعدی، نیرویی «نامرئی» سفینه فضایی را به درون سیاه چاله ای می کشد. تنها هنگامی که صفحهٔ نمایشگر پرسپکتیو را تغیر می دهد خدمهٔ سفینه پی می برند که این نیروی ناشناخته، جهانی دو بعدی از موجودات زندهٔ بسیار کوچک است.

از کمدی الهی دانته. نقشه فلک های هم مرکز، که زمین را درون فلک (حامل فلک تدویر) ماه نشان می هد و این فلک ها نیز درون فلک (حامل فلک تدویر) عطارد قرار گرفته اند.

ریاضیات و پیکره تراشی

دادن ماهیتی فیزیکی به کارهای مفهومی یک هنرمند، اغلب نیازمند درک و شناخت ریاضی برای تحقق بخشیدن به آن اثر است. لئوناردو داوینچی بیشتر آفرینش هایش را پیش از پرداختن به آن از نظر ریاضی تحلیل می کرد. اگر موریس اشر اندیشهٔ کاشیکاری ها و خطا های بصری را از نظر ریاضی تجزیه و تحلیل نکرده بود، آثارش به آن راحتی که او قادر به اجرای آنها بود، شکل نمی گرفت. امروزه بسیاری از پیکر تراشان برای گسترش هنر خویش به مفهوم ریاضی توجه دارند. تونی رابین از بررسی هندسهٔ شبه بلورها، هندسهٔ چهاربعدی و علوم کامپیوتری برای تکامل و گسترش هنر خویش استفاده می کند. رونالد دیل رش در پیکره غول آسایش تخم مرغ عید پاک، از الهام، نبوغ، ریاضیات و کامپیوتر نیز همانند دستانش استفاده کرده است تا آفریدهٔ خود را کامل کند.



این طرح لئوناردو تحلیل او را از آناتومی بدن اسب نشان می دهد

پیکره با هر چه باشد، ریاضیات از آنها جدا نشدنی است. پیکره را می توان بدون یک اندیشهٔ ریاضی تصور کرد و آفرید، با این وجود ریاضیات بر آن اثر حضور دارد، درست همانطور که در موجودات طبیعی وجود دارد.

یک آویز متحرک از الکساندر کالدر. ساختمان شرقی گالری ملی هنر، واشنگتن دی سی.

پدید آورنده در برابر پیوستار اثر چارلز پری موزهٔ ملی هوا و فضا، واشنگتن دی سی

آمیزش هنر و ریاضیات در آثار آبرشت دورر

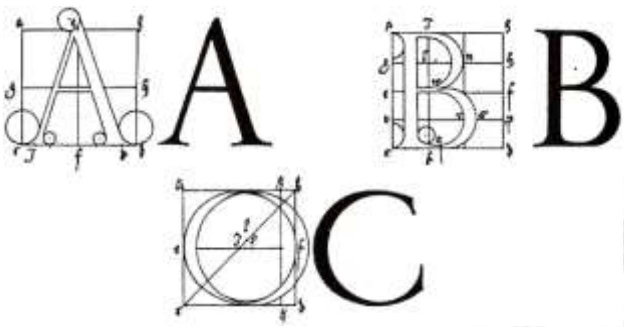
... هندسه شالوده نقاشی است. «آلبرشت دورر»

آلبرشت دورر (۱۵۲۸ـ۱۴۷۱) هنرمندی با استعدادهای فراوان بود. پدر دورر امیدوار بود که از ۱۸ فرزندش آلبرشت، کار او، زرگری را دنبال کند. بنابراین دورر در نزد میخائیل وُلگموت کارآموزی کرد که اتفاقاً او نیز هنرمند بود. دورر پس از سه سال کارآموزی، به مسافرت و کار در سر تا سر اروپا پرداخت، و طی آن نقاشی، حکاکی، چاپ و ساخت گراور را آموخت، که همه آنها بر کار او تاثیر گذاشت. او احساس می کرد که مطالعهٔ ریاضیات، به ویژه هندسه، پرسپکتیو و مفهوم های هندسهٔ تصویری موجب بهبود هنر شده است. دورر کار زیادی نیز در زمینهٔ تناسب در بدن انسان انجام داد. علاوه بر آن کتاب هایی دربارهٔ ریاضیات مورد استفاده خویش

نوشت. تعدادی از آثار او اصیل و دقیق بودند[14] در حالی که سایر کارها و ترسیم های هندسی او تقریبی و در خدمت نیازهای هنری او بودند. در این راه او ابزارهایی مکانیکی برای کمک به هنرمندان در ترسیم پرسپکتیو ابداع کرد.

گراوری چوبی در رساله ای دربارۀ هندسه از دورر

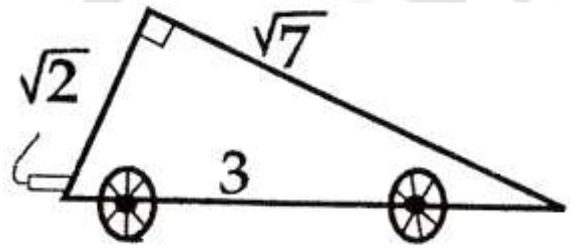
دورر را می توان آغازگر ارائه مفهوم توپوگرافی دانست. او در یکی از کتاب هایش ترسیم هندسی حروف رومی را نشان می دهد. دورر روش ریاضی خود را برای حروف گوتیک، با ساخت هر حرف از ترکیب مربع ها، مثلث ها، ذوزنقه ها یا متوازی الاضلاع ابداع کرده بود. او ساختار حروف گوتیک با استفاده از این اجزای سازنده ـ تا حدی مشابه با روش شکل گیری حروف از پیکسل ها[15] در نقش اجزای سازنده در کامپیوتر ساماندهی کرده بود.



این ساخت های هندسی در دورۀ نوزایی ابداع شده اند. گرچه این اندشه ها در آن زمان منتشر نشده بودند.

داستان π

زمان های بسیار قدیم مهمانی بزرگی برای اعداد آن زمان برگزار شد. عدد یک با تمام شکوهش آنجا بود. عدد دو با تمام شکوهش آنجا بود. عدد دو با تمام اعداد زوج به دنبالش وارد شدند. و تمام اعداد اول آمده بودند. حتی بعضی از کسرها مانند $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ هم بودند. چند ریشه مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هم که تازگی از اضلاع یک مثلث قائم الزاویه با وتر ۳ به دست آمده بودند حضور یافتند. اما سر و کلۀ π که پیدا شد همه پرسیدند «چه کسی شما را دعوت کرده است؟»



$\sqrt{2}$ و $\sqrt{1}$ که به تازگی از مثلث قائم الزاویه با وتر ۳ به دست آمده بودند از راه رسیدند.

---

[14] دورر با دنبال کردن نقطه ای از یک دایره و چرخش آن در مسیر محیط دایرۀ دیگری برون چرخزادی پدید آورد. اما چون معلومات جبری کافی نداشت این منحنی را تحلیل نکرد. به همین نحو، مارپیچ هایی از تصویر کردن منحنی های فضایی فنردار ترسیم کرد، اما آنها را از نظر ریاضی دنبال نکرد.

[15] pixel کوته نوشت picture element(تصویر دانه) که نمایش تصویری یک بیت بر روی صفحۀ کامپیوتر است. یک بیت bit کوته نوشت binary digit(رقم دودویی) است که کوچکترین واحد اطلاعاتی است که کامپیوتر می تواند داشته باشد. ارزش بیت با اعداد. یا ۱ است، و جریان الکتریکی «خاموش» یا «روشن» را نشان می دهد که به مربع سفید یا سیاه روی پرده تبدیل می شود.

π پرسید «منظورتان چیست که چه کسی مرا دعوت کرده، من هم یک عددم». «بله، اما شما جایتان را روی خط اعداد می دانید؟ π پرسید «$\sqrt{2}$ چی؟» $\sqrt{2}$ جواب داد: «به لطف فیثاقورث و استفاده از پرگار، من دقیقاً می دانم به کجا در خط اعداد تعلق دارم.»

π شرمنده شد و رنجید، اما گفت: «کمی بعد از ۳».

همگی پرسیدند «اما دقیقاً کجا؟»

چون یک مقسوم علیه مشترک تمام اعداد است، دلش برای π سوخت و گفت «بیایید این امکان را به او بدهیم که خودش توضیح دهد.»

آنگاه π داستانش را آغاز کرد: «همانطور که می دانید، ابتدا بابلیان مرا کشف کردند. تعدادی از کاتبان باستانی دایره هایی با شعاع های مختلف ترسیم کردند. کاتبی با دو برابر کردن شعاع، قطر هر دایره را به دست آورد و صرفاً برای تفریح تصمیم گرفت قطرها را دور دایره ها بچرخاند و با کمال شگفتی دید صرفنظر از اندازۀ دایره، قطرهای پیچیده دور دایره کمی بیش از ۳ است. این کشفی هیجان انگیز بود. این خبر به سرعت در سراسر جهان از مصر تا یونان و چین منتشر شد. مردم سراسر جهان دربارۀ من اطلاع پیدا کردند. آنها به دلیل ارتباط ویژۀ من با دایره روش های جدیدی برای مساحت و محیط دایره با استفاده از من در محاسباتشان پیدا کردند. آنها مشتاق یافتن اندازۀ دقیق من بودند. قصد جسارت ندارم، اما آنها می دانستند که من عددی معمولی نیستم، به ویژه به این دلیل که به عددی کاملاً شبیه به من برنخورده بودند. آنها نمی توانستند مرا از معادلات جبری معمولی خود استخراج کنند، بنابراین بعدها مرا غیرجبری نامیدند. احتمالاً اطلاع یافته اید که از یافتن نام دقیق یک عدد برای من صرفنظر کردند. من از π راضی ام. کاملاً برای من مناسب است. اما نه، می دانید بعضی از ریاضیدانان چقدر یک دنده اند، آنها می خواستند هر چه می شود دقیق تر باشند. پس قرن ها پس از آن تا امروز، برای محاسبۀ من با تقریب دقیق تر ابزارها و روش های جدیدی ابداع کرده اند.

ارشمیدس، ریاضیدان مشهور، مقدار مرا بین $۳\frac{10}{71}$ تا $۳\frac{1}{7}$ یافته بود. در تورات دوبار از من یاد شده و مقدارم ۳ به شمار آمده است. ریاضیدانان مصری از ۳/۱۶ در مورد من استفاده می کردند، و بطلیموس مرا در سال ۱۵۰ میلادی ۳/۱۴۱۶ برآورد کرده بود.

ریاضیدانان می دانند که هرگز مقدار مرا به دست نمی آورند، اما به رساندن من به مرتبه های اعشاری هر چه بیشتر ادامه می دهند. نمی توانید تصورش را بکنید که همراه داشتن تمام آن مرتبه های اعشاری چه بار سنگینی است. اگر از حسابان و کامپیوتر استفاده شود به میلیون ها رقم اعشاری می رسم.

آنها می گویند برای محاسبۀ چیزهای مختلفی، مانند حجم، مساحت، محیط و هر آنچه با دایره، استوانه و کره ارتباط دارد وجود من ضروری است. در احتمالات نیز نقش مهمی دارم، و با تقریب اعشاری میلیونی من، کامپیوترهای جدید امروزی برای نشان دادن توانایی و آزمایش دقت و سرعت خود به من اتکا دارند.»

۱ فریاد کرد: «دیگر چیزی نگویید. من اطمینان دارم که همۀ ما می پذیریم که عددی پرآوازه چون π باید جزء ما به شمار آید. سرانجام می دانیم که هر یک از ما نقطۀ خود را بر روی خط اعداد داریم. هیچ عددی نمی تواند جای عدد دیگری را بگیرد. π جای خود را دارد. دانستن جای دقیق نقطۀ او چندان مهم نیست.»

۳ یکی از اعداد مرموز فریاد زد: «موافقم». $\sqrt{2}$ گفت: «من فکر می کنم π کمی رمزگونگی، تنوع و هیجان به این گردهمایی بخشیده است.» اعداد دیگر فریاد برآوردند «خوش آمدی». π گفت: «بیایید جشنمان را ادامه دهیم. بیایید شروع به شمردن کنیم».

فصل یازدهم؛ افسون منطق، سرگرمی و بازی

نظریهٔ آشوب یاور پرندگان است


یک دسته کاکائی اپتوس کالیفرنیا.

آیا تاکنون تماشا کردن دسته ای پرندهٔ در حال پرواز که در هوا در هماهنگی کامل از سویی به سوی دیگر می روند مسحورتان کرده است؟ چرا پرندگان به هم برخورد نمی کنند؟ فرانک اج. هنپر، جانور شناس می خواست به این پرسش پاسخ دهد. پس از فیلمبرداری و بررسی موشکافانهٔ تک تک فریم ها، به این نتیجه رسید که پرندگان را رهبری هدایت نمی کند. آنها در حالت تعادل پایدار با تغییر مداوم پرنده های دستهٔ لبهٔ جلو در فواصل کوتاه زمانی پرواز می کردند. او تا وقتی که با نظریهٔ آشوب و کامپیوتر آشنا نشده بود، قادر به توضیح حرکت گروهی پرندگان نبود. هنپر با مفاهیم نظریهٔ آشوب برنامه ای کامپیوتری ساخت که حرکت عملی دستهٔ پرندگان را شبیه سازی می کرد. او چهار قاعدهٔ ساده[16] بر پایهٔ رفتار پرندگان وضع کرد، و از مثلث برای نمایش پرندگان استفاده کرد. با تغییر شدت در هر یک از قائده ها، دستهٔ مثلث ها در صفحهٔ نمایشگر کامپیوتر به روش هایی آشنا پرواز می کنند. هنپر ادعا نمی کند که برنامه اش لزوماً شکل گیری دستهٔ پرندگان را توضیح می دهد، اما توضیحی عملی برای چگونگی و علت پرواز گروهی پرندگان به دست می دهد. به نظر می رسد که نظریهٔ آشوب اینجا هم حضور دارد!


شاید دستهٔ ماهی ها نیز در حالت تعادل پایدار حرکت می کنند.

[16] قواعدی که او وضع کرده است عبارتند از: (۱) پرندگان به طرف نقطه ای کانونی یا آشیانه جذب می شوند. (۲) پرندگان به طرف هم کشیده می شوند. (۳) پرندگان می خواهند سرعت شان را ثابت نگه دارند. (۴) مسیر پرواز با رویدادهای تصادفی مانند وزش باد تغییر می کند.

باغی با حواشی ریاضی

باغبان با سلام گفتن به طلوع و گیاهانش گفت «صبح بخیر، روزا!». او از این که در برگ ها و خاک حاصلخیز چیزهای عجیب مخفی شده اند اطلاع کمی داشت. در عمق ریشهٔ گیاهان برخال ها و شبکه ها حضور داشتند و از زنبق ها، گل های همیشه بهار، و مینا ها و کاسموس[17] اعداد فیبوناچی به او نگاه می کردند.

به مراسم روزانهٔ مراقبت از باغ ادامه داد. در هر جایی چیزی غیر عادی ظاهر می شد. اما او اعتنایی نمی کرد، و تنها شگفتی های آشکار طبیعت او را مجذوب می کرد.

ابتدا سرخس ها را مرتب کرد و برگ های پژمرده را کند تا برگ های نوشکفته نمایان شوند. او مارپیچ های همزاویه را که به او سلام می کردند و برخال برگ ها را روی سرخس نشناخت. ناگهان با وزش نسیم، رایحهٔ خوش پیچ امین الدوله را احساس کرد. با نگاهی کوتاه، دید چگونه از پرچین رد شده و وارد نخود سبزه ها شده است. فکر کرد که باغ قطعاً به هرس کاملی نیاز دارد. متوجه نشد که مارپیچ های فنری در کارند و مارپیچ های چپ گرد پیچ های فنری امین و الدوله دور مارپیچ های فنری راست گرد نخود ها پیچیده اند. برای جلوگیری از صدمه زدن به محصول نخود، دستی محتاط لازم بود.

سپس به وجین کردن زیر نخلی که کاشته بود پرداخت تا حدی به باغش حال و هوای خوبی بخشد. شاخه هایش در نسیم تکان می خوردند و تصوری از این نداشت که منحنی های گستردهٔ آن به شانه هایش می سایند.

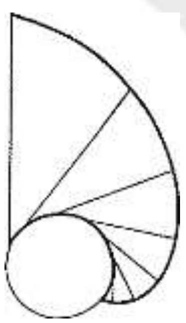
نگاهی دزدکی به ذرت هایش کرد. فکر کرد «ها!» تردید داشت که ذرت بکارد. اما رشد خوب ذرت نورس او را دلگرم کرد. پیوند های سه گانهٔ دانه های درشت دور از چشم او از درون خوشه ها شکل می گرفتند.

تمام باغ چه خوب از آب در می آمد. کشت های جدید در آن فوران می کرد! با تحسین برگ های تازهٔ درخت افرا، می دانست که در شکل آنها چیزی فی نفسه خوشایند وجود دارد ـ خطوط تقارن طبیعت کار خود را به خوبی انجام داده بودند.

و یکی دیگر از جلوه های فیلوتاکسی[18] طبیعت تنها برای چشمان آموزش دیده، در برگ هایی که بر روی شاخه ها و ساقه ها شکوفه می زدند، معلوم می شد.

او با نگاهی به اطراف، به جالیز هویج توجه کرد. از آن راضی بود و متوجه شد که برای اطمینان از به دست آمدن هویج هایی با اندازهٔ خوب و یکنواخت به تنک کردن نیاز دارند. نمی خواست در خانه بندی فضا با هویج ها به طبیعت متکی باشد.

تصوری از این نداشت که باغ پر از مارپیچ های همزاویه است. آنها در خوشهٔ دانه های مینا و گل های گوناگون حضور داشتند. بسیاری از چیزهایی که رشد می کنند شکل مارپیچ دارند، زیرا شکل خود را با بزرگ تر شدن حفظ می کنند.



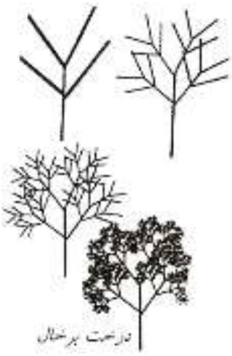
هوا داشت گرم می شد. بنابراین تصمیم گرفت وقتی به کشت ادامه دهد که محل خورشید تغییر پیدا کرده باشد. در این زمان آخرین ارزیابی اش را انجام داد که با تحسین ترکیب گل ها، سبزها و گیاهان دیگر بود، که او آنها را از روی فکر انتخاب کرده بود. اما باز هم از چیزی غافل بود. باغش پر از کره، مخروط، شش وجهی، و اشکال دیگر هندسی بود، که به وجودشان پی نبرده بود.

انواع تقارن در باغ دیده می شود. مثلاً در این عکس می توان تقارن نقطه ای را در بروکلی و تقارن محوری را در برگ هایش دید.

---

[17] کاسموس یکس از گیاهان آمزیکای حاره ای که به خاطر گل شعاعی زیبای آن کشت می شود.

[18] آرایهٔ هندسی روی میوه ها در طبیعت.



برخال ها می توانند مانند چیزهایی با تغییر یا رشد متقارن یا چیزهایی با تغییر نامتقارن تصادفی ظاهر شوند. برخال ها، در هر دو حالت، بر پایهٔ قواعد و الگو هایی تغییر می کنند که برای تشریح و تعیین رشد یک شکل آغازین مورد استفاده قرار می گیرند.

برخال هندسی را مانند الگوی ساخت بی پایان در نظر بگیرید ـ این الگو دائماً خود را در مقیاسی کوچکتر تکرار می کند. بنابراین هنگامی که بخشی از برخال هندسی را بزرگ می کنیم شبیه به شکل اصلی دیده می شود. بر عکس هنگامی که یک شکل اقلیدسی مانند دایره را بزرگ کنیم کمتر منحنی دیده می شود. سرخس نمونه ای مطلوب از تکثیر برخالی است. اگر به هر بخشی از سرخس برخالی توجه کنید، درست مانند برگ سرخس اصلی ظاهر می شود. می توان سرخس برخالی را بر روی کامپیوتر ساخت.

شبکه ها نمودارهای ریاضی اند که تصویری ساده تر از یک مسئله یا راه حل عرضه می کنند. اویلر از شبکه ها در مسالهٔ پل کونیگزبرگ استفاده کرد (به افسون منطق، فصل سرگرمی و بازی مراجعه کنید). او مسئله را به نموداری ساده تبدیل و آن را تحلیل و حل کرد. امروزه ها شبکه ها ابزارهایی هستند که در توپولوژِ مورد استفاده قرار می گیرند.

اعداد فیبوناچی ...، ۲۱، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱ فیوناچی (لئوناردو پیزائی) یکی از ریاضیدانان پیشتاز سده های میانه بود. گرچه او سهمی مهم در حساب، جبر و هندسه داشت، امروزه به خاطر سری اعدادش مشهور است، که راه حلی برای مسئله مبهمی در کتاب حساب (لیبر آباگی) بود. ادوارد لوکاس ریاضیدان فرانسوی یک اثر ریاضی تفریحی تدوین کرد که در بر گیرنده این مسئله بود. در این زمان بود که نام فیبوناچی را بر روی این رشته گذاشته است. این رشته در طبیعت در این موارد دیده می شود:

● گل های دارای گلبرگ به تعداد اعداد فیبوناچی (triliom، رز وحشی wildrose کاسموس cosmes، columbine، شکوفهٔ سوسن، زنبق)

● آرایش برگ ها، ترکه ها و ساقه ها که برگ آذین یا آرایش برگ (فیلوتاکسیس) نامیده می شود. برگی را بر روی ساقه انتخاب کنید و تعداد برگ ها را بشمارید (فرض کنید که هیچ کدام کنده نشده اند) تا به برگی برسید که مستقیماً با آن که انتخاب کرده اید همسو است. کل تعداد برگ ها (بدون محاسبه برگ انتخاب شده) معمولاً در بسیاری از گیاهان مانند درختان گیلاس، گلابی و نارون عدد فیبوناچی است.

● اعداد مخروط کاج: اگر مارپیچ های چپ گرد و راست گرد میوهٔ کاج را بشماریم، این دو عدد اغلب اعداد متوالی فیبوناچی اند. برای دانه های گل آفتاب گردان و سایر گل ها نیز این امر صادق است. در مورد آناناس نیز چنین است. با نگاه به ته آناناس تعداد مارپیچ های چپ و راست ترکیب یافته از پولک های به شکل شش ضلعی را بشمرید. باید اعداد متوالی فیبوناچی باشند.

مارپیچ ها و مارپیچ های فنری: مارپیچ ها اشکالی ریاضی اند که در بسیاری از مظاهر طبیعت، مانند منحنی سرخس پیچی، مو، صدف ها، طوفان های پیچنده، تند بادها، میوه کاج، راه شیری و گرداب ها مشاهده می شوند. مارپیچ هایی مسطح، سه بعدی، راست گرد و

چپ گرد، همزاویه لگاریتمی و سهمی شکل وجود دارند. مارپیچ های ارشمیدسی، و مارپیچ های فنری انواعی از مارپیچ اند که ریاضیات آنها را توصیف می کند. مارپیچ های هم زاویه در اشکال رشد در طبیعت مانند صدف دریایی حلزونی، دانه های آفتاب گردان، تارهای نوعی عنکبوت مشاهده می شود. تعدادی از ویژگی های مارپیچ همزاویه عبارت اند از ـ زاویه های به دست آمده از مماس ها به شعاع های مارپیچ برابر اند (و نام هم زاویه از این آمده است) ـ با تصاعد هندسی بزرگ تر می شود و بدین ترتیب مارپیچ هر شعاعی را به پاره خط هایی تقسیم می کند که تشکیل یک تساعد هندسی می دهند ـ با بزرگ تر شدن شکل، آن حفظ می شود.

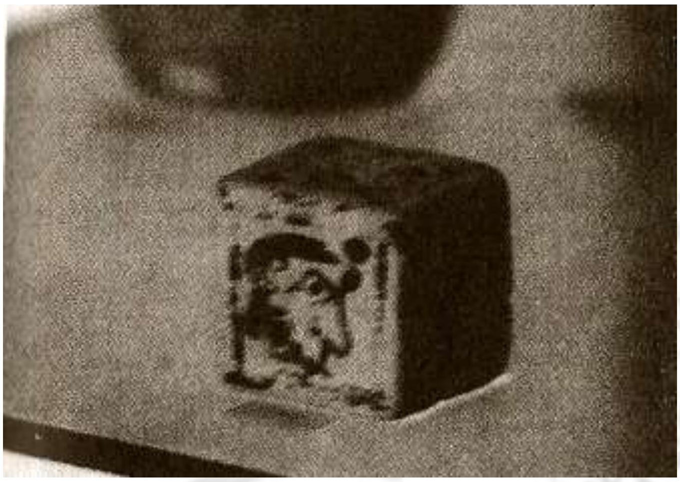
منحنی گسترنده: هنگامی که ریسمانی دور یک منحنی (در اینجا دایره) بسته یا از آن باز می شود، یک منحنی گسترنده را نشان می دهد. شکلی که در منقار عقاب، بالهٔ پشت کوسه ماهی، و نوک برگ نخل آویخته دیده می شود.

پیوندگاه سه گانه: نقطه ایست که در آن سه پاره خط با زاویهٔ ۱۲۰ تلاقی می کنند. بسیاری از رویدادهای طبیعی ناشی از مرزها یا موجود بودن فضا ناشی می شود. پیوندگاه سه گانه نقطهٔ تعادلی است که بعضی از پدیده های طبیعی بدان گرایش دارند. از آن جمله در گروه های حباب صابون شکل گیری دانه های ذرت، و ترک برداشتن زمین یا سنگ یافت می شود.

تقارن: تقارن توازن کاملی است که در بدن پروانه، در شکل برگ در بدن انسان، در کمان دایره دیده می شود. از دیدگاه ریاضی، یک شیء هنگامی متقارن شمرده می شود که بتوان خطی یافت که آنرا به دو بخش کاملاً یکسان تقسیم کند. به گونه ای که با تا کردن آن بر روی آن فرد هر دو بخش کاملاً بر روی یکدیگر قرار گیرند. یک شیء هنگامی تقارن مرکزی دارد که بی نهایت از این گونه برای خط ها برای یک نقطه وجود داشته باشد. مثلاً یک دایره نسبت به مرکز خود تقارن مرکزی دارد.
خانه بندی: خانه بندی کردن یک صفحه به معنی آن است که بتوان آنرا با کاشی های مسطحی پوشاند که فاصله یا همپوشانی بین کاشی ها وجود نداشته باشد، مانند شش ضلعی منتظم مربع یا شکل های دیگر. فضا با اشکال سه بعدی مانند مکعب، یک هشت وجهی برش خورده، خانه بندی یا پر می شود.

یکی از اولین سازنده های اعداد تصادفی

اگر چه تاس در یونان باستان سازندهٔ عدد تصادفی به شمار نمی آمد، با این حال این تاس یکی از کهن ترین تاس های موجود شمرده می شود. امروزه این تاس باستانی در موزهٔ باستان شناسی ملی آتن نگهداری می شود. تاس در طی سده ها نقش های گوناگونی بازی کرده است. از آن برای پیشگویی آینده، در بازی های گوناگونی مانند تخته نرد و روپولی[۱۹] استفاده می شده است. یا در تاس بازی آمریکایی[۲۰] عنصر اصلی بازی است. ریاضیدانان مدت ها از دیدگاه احتمالات مجذوب تاس بوده اند. در واقع، تاس را می توان عامل اصلی توجه بلز پاسکال و پیر دو فرما به احتمالات به شمار آورد. یکی از دوستان پاسکال در هنگام قمار بازی از او پرسید اگر بازی پیش از آنکه تمام شود متوقف شود پول صندوق را چگونه باید تقسیم کرد. پاسکال در مورد این مسئله به فرما نامه ای نوشت. این دو نفر در سال ۱۶۵۴ در نامه هایشان به یکدیگر نظریهٔ احتمال را پایه ریزی کردند و بدین ترتیب شاخهٔ جدیدی را در ریاضیات بنیان نهادند. امروزه از تاس و سایر تولید کنندگان عددهای تصادفی در آموزش ویژگی های نظریهٔ احتمال استفاده می شود.



[۱۹] روپولی (monopoly) نوعی بازی بر روی یک صفحهٔ مخصوص، دو نفر یا چند نفره، که حرکت آنها با انداختن تاس انجام می شود، و با آن خرید مستغلات انجام می گیرد.

[۲۰] نوعی تاس انجام بازی که دو تاس را با هم می اندازند و بر سر اینکه جمع این دو چند می شود شرط بندی می کنند.

بنیاد بین المللی تئوری ها و دکترین ها The
International Foundation of
Theories and Doctrines

افسون ریاضیات؛ کشف جذابیت های ریاضیات

نویسنده : تئونی پاپاس

ترجمه: عباس‌علی کتیرائی

انتشارات مازیار

آدرس سایت :

www.iftad.org

آدرس ایمیل :

books@iftad.org